

Examenul de bacalaureat național 2018  
Proba E. c)

Matematică  $M\_mate-info$

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

ЗАВДАННЯ I

(30 балів)

- 56 1. Знайдіть комплексне число  $z$  знаючи, що  $2\bar{z} - z = 1 - 3i$ , де  $\bar{z}$  - спряжене до числа  $z$ .
- 56 2. Розглядають функцію  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - mx + 1$ , де  $m$  - дійсне число. Знайдіть дійсні числа  $m$  знаючи, що вершина параболи функції  $f$  знаходиться на вісі  $Ox$ .
- 56 3. Розв'яжіть у множині дійсних чисел рівняння  $\frac{\lg x}{\lg(x+2)} = \frac{1}{2}$ .
- 56 4. Обчисліть ймовірність того, що вибираючи число з множини двоцифрових натуральних чисел воно буде мати різні і непарні цифри.
- 56 5. У декартовому репері  $xOy$  розглядають точку  $A(-5, 2)$  і пряму  $d$  задана рівнянням  $y = x + 1$ . Напишіть рівняння прямої, яка проходить через точку  $A$  і є перпендикулярною до прямої  $d$ .
- 56 6. Докажіть, що  $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$ , для будь-якого дійсного числа  $x$ .

ЗАВДАННЯ II

(30 балів)

1. Розглядають матрицю  $M(m) = \begin{pmatrix} 2m & 1 & 1 \\ 1 & 2m & 1 \\ 1 & 1 & 2m \end{pmatrix}$  і систему рівнянь  $\begin{cases} 2mx + y + z = -1 \\ x + 2my + z = 0 \\ x + y + 2mz = 1 \end{cases}$ , де  $m$  - дійсне число.
- 56 а) Докажіть, що  $\det(M(0)) = 2$ .
- 56 б) Визначте дійсні числа  $m$ , знаючи, що  $\det(M(m)) = 0$ .
- 56 в) Для  $m = -1$ , докажіть, що якщо  $(a, b, c)$  - один розв'язок системи, то як найбільше одне із чисел  $a$ ,  $b$  і  $c$  - ціле.
2. На множині дійсних чисел задано асоціативний закон композиції  $x * y = 4xy + 3x + 3y + \frac{3}{2}$ .
- 56 а) Докажіть, що  $x * y = 4\left(x + \frac{3}{4}\right)\left(y + \frac{3}{4}\right) - \frac{3}{4}$ , для будь-яких дійсних чисел  $x$  і  $y$ .
- 56 б) Визначте дійсне число  $x$  для якого  $x * x * x = -\frac{1}{2}$ .
- 56 в) Знайдіть дійсні числа  $a$  знаючи, що  $f(x) * f(y) = f(x + y)$ , для будь-яких дійсних чисел  $x$  і  $y$ , де  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = ae^x - \frac{3}{4}$ .

ЗАВДАННЯ III

(30 балів)

1. Розглядають функцію  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 8x^2 - \ln x$ .
- 56 а) Докажіть, що  $f'(x) = \frac{(4x-1)(4x+1)}{x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .
- 56 б) Докажіть, що точка  $A\left(\frac{2}{3}, 3\right)$  належить дотичній до графіка функції  $f$  у точці з абсцисою  $x = 1$ , яка належить графіку функції  $f$ .

56 c) Докажіть, що  $f\left(\frac{1}{3}\right) < f\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right) < f\left(\frac{1}{2}\right)$ .

2. Розглядають функцію  $f : (-3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{2x+3}{x+3}$ .

56 a) Докажіть, що  $\int_0^1 (x+3)f(x)dx = 4$ .

56 b) Докажіть, що  $\int_0^1 f(x)dx = 2 - 3\ln\frac{4}{3}$ .

56 c) Для кожного натурального числа  $n$ , розглядають число  $I_n = \int_0^1 e^x (x+3)^n (f(x))^n dx$ .

Докажіть, що  $I_n + 2nI_{n-1} = e \cdot 5^n - 3^n$ , для будь-якого натурального числа  $n$ ,  $n \geq 1$ .