

Examenul de bacalaureat național 2018

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p 1. Határozd meg a $(b_n)_{n \geq 1}$ mértani haladvány első három tagjának szorzatát tudva, hogy $b_2 = 4$.
- 5p 2. Adottak az $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)^2$ és $g(x) = 2018 - x$ függvények. Számítsd ki $g(f(1))$ -et!
- 5p 3. Oldd meg a valós számok halmazán az $25^x = 5^{x^2}$ egyenletet!
- 5p 4. Számítsd ki annak a valószínűségét, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott kétjegyű természetes számban a tízesek helyén szereplő számjegy 9 legyen!
- 5p 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adott az $(a-1)x - a^2y - a^2 = 0$ egyenletű d egyenes, ahol a nullától különböző valós szám. Határozd meg az a nullától különböző valós számot, tudva, hogy a d egyenes párhuzamos az Ox tengellyel!
- 5p 6. Igazold, hogy $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = \frac{5}{2}$ tudva, hogy $\sin x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ és $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

II. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adottak az $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $A(x) = \begin{pmatrix} x+2 & x \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ mátrixok, ahol x valós szám.
- 5p a) Igazold, hogy $\det(A(1)) = -7$.
- 5p b) Bizonyítsd be, hogy $xA(y) - yA(x) = (x-y)A(0)$, bármely x és y valós számok esetén!
- 5p c) Határozd meg az a valós számokat, tudva, hogy $(aA(-1) + A(a))A(0) = (a^2 + 7)I_2$.
2. Adott $f = 4X^3 - 6X + m$ polinom, ahol m valós szám.
- 5p a) Az $m = 2$ esetén, igazold, hogy $f(1) = 0$.
- 5p b) Igazold, hogy az f polinom egyetlen m valós szám esetén se osztható az $X^2 + X + 1$ polinommal!
- 5p c) Határozd meg az m valós számot, tudva hogy $\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right)^2 = \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \frac{1}{x_3}$, ahol x_1, x_2 és x_3 az f polinom gyökei!

III. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adott az $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Határozd meg az f függvény grafikonjához, az f függvény grafikonjának az $x = 1$ abszcisszájú pontjában húzott érintő egyenletét!
- 5p c) Igazold, hogy $\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$, bármely $x \in (0, +\infty)$ esetén!
2. Adott az $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x+1}$ függvény.
- 5p a) Igazold, hogy $\int_0^2 (x+1)f(x)dx = 22$.
- 5p b) Számítsd ki $\int_0^1 \left(f(x) - \frac{1}{x+1}\right)e^{x^3} dx$.
- 5p c) Határozd meg az n természetes számot tudva, hogy a $g: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - 3x^2$ függvény grafikonjának az Ox tengely körüli forgatásakor keletkezett test térfogata $\frac{\pi}{n}$.