

Logaritmi

Definiție. Fie $a \in \mathbb{R}^*$, $a \neq 1$ și $b \in \mathbb{R}^*$ două numere reale. Se numește logaritm al numărului real strict pozitiv b exponentul la care trebuie ridicat numărul a , numit bază, pentru a obține numărul b .

Logaritmul numărului b în baza a se notează $\log_a b$

Evident $b = a^{\log_a b}$. Pentru $a = 10$ obținem logaritmi zecimali ($\lg x$), iar pentru $a = e = 2.71828$ (numărul lui Euler) obținem logaritmi naturali ($\ln x$).

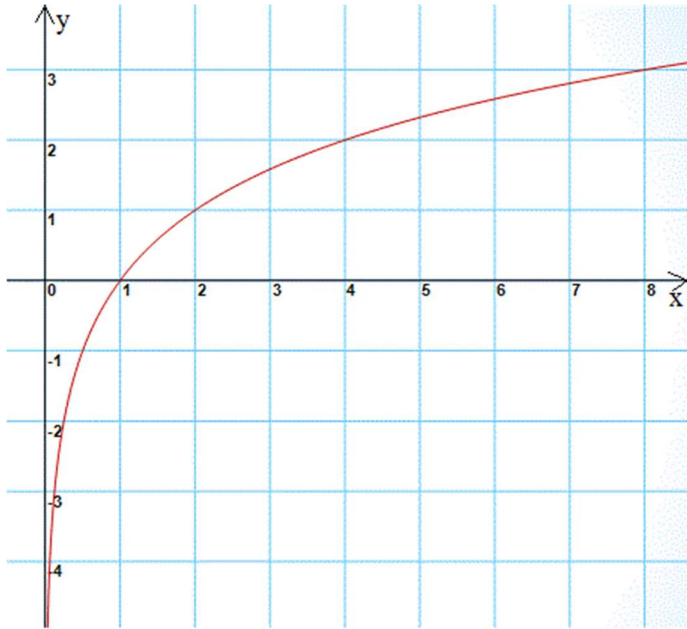
Proprietăți:

1. Identitatea logaritmică fundamentală $a^{\log_a b} = b$ unde $a > 0$, $a \neq 1$ și $b > 0$.
2. $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$, ($b, c > 0$);
3. $\log_a a = 1$;
4. $\log_a 1 = 0$
5. $\log_a a^c = c$; $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$; $\log_a x^{2n} = 2n \log_a |x|$, $x \neq 0$
6. $\log_a \sqrt[m]{b} = \frac{1}{m} \log_a b$, ($b > 0, m \in \mathbb{N}, m \geq 2$);
7. $\log_a b \cdot \log_b a = 1$;
8. Formula de schimbare a bazei logaritmului: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
9. $x > 0$ și $y > 0 \Rightarrow \log_a xy = \log_a x + \log_a y$;
10. $x > 0$ și $y > 0 \Rightarrow \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;
11. $a > 1$ și $x \in (0, 1) \Rightarrow \log_a x < 0$; $a > 1$ și $x > 1 \Rightarrow \log_a x > 0$;
12. $0 < a < 1$ și $x \in (0, 1) \Rightarrow \log_a x > 0$; $0 < a < 1$ și $x > 1 \Rightarrow \log_a x < 0$;
13. $a > 1$ și $0 < x < y \Rightarrow \log_a x < \log_a y$;
14. $x > 0, y > 0, a > 0, b > 0, a \neq 1, b \neq 1 \Rightarrow \frac{\log_a x}{\log_a y} = \frac{\log_b x}{\log_b y}$;
15. $x > 0, a > 0, a \neq 1, n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \cdot \log_a x = \log_a x^n$;
16. $x \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1 \Rightarrow a^x = e^{x \ln a}$.

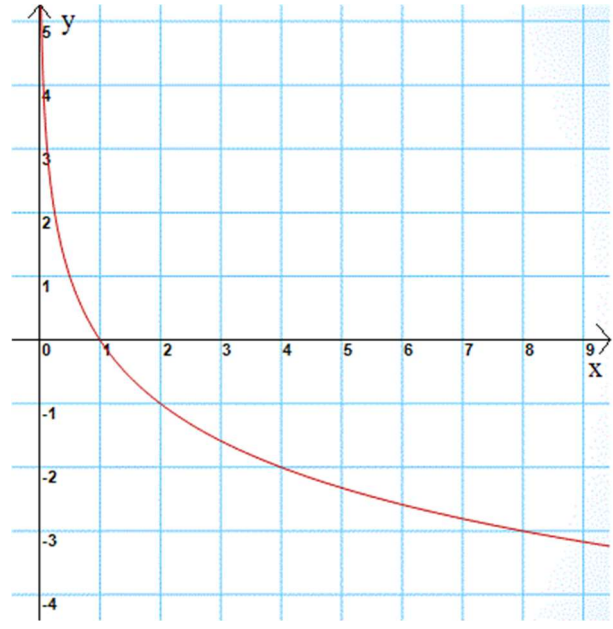
Funcția logaritmică

Definiție. Fie $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$. Funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \log_a x$ se numește funcția logaritmică de bază a .

Graficul funcției logaritmice



$\log_a x$, $a > 1$



$\log_a x$, $0 < a < 1$

Proprietățile funcției logaritmice

1. $f(1) = 0$, $\forall x \in (0, +\infty)$;
2. Dacă $a > 0$ funcția logaritmică este strict crescătoare;
 $0 < a < 1$ funcția logaritmică este strict descrescătoare;
3. Dacă $a > 0$, $x < 1$, atunci $f(x) < 0$;
 $a > 0$, $x > 1$, atunci $f(x) > 0$;
 $0 < a < 1$, $x < 1$, atunci $f(x) > 0$;
 $0 < a < 1$, $x > 1$, atunci $f(x) < 0$;
4. Funcția logaritmică este bijectivă;
5. Funcția logaritmică este inversabilă și inversa ei este funcția exponențială.

Ecuții și inecuații logaritmice fundamentale

1. $\log_a x = b$, $a > 0$, $a \neq 1$, $b \in \mathbf{R}$. Soluția: $x = a^b$.
2. $\log_a x > b$, $b \in \mathbf{R}$. Fie S mulțimea soluțiilor. Avem:

a	S
$a > 1$	$(a^b, +\infty)$
$0 < a < 1$	$(0, a^b)$

3. $\log_a x < b$, $b \in \mathbf{R}$. Fie S mulțimea soluțiilor. Avem:

a	S
$a > 1$	$(0, a^b)$
$0 < a < 1$	$(a^b, +\infty)$

Ecuatii logaritmice bacalaureat 2014-2016

4. Ecuatia $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ ($a > 0, a \neq 1$) este echivalentă cu
 $f(x) = g(x)$, cu condițiile $f(x) > 0, g(x) > 0$

5. Ecuatia $\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x)$ este echivalenta cu
 $f(x) = g(x)$,

Condiții:

$$\left. \begin{array}{l} h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1, \\ f(x) > 0, g(x) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow D \text{ domeniul de rezolvabilitate}$$

Probleme propuse

1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x^2 + 5) = \lg 9$.
2. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(x^2 - 4) = \log_5(5x - 8)$.
3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(2x + 1) = \log_3 5$.
4. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(2x - 8) = \log_3 2$.
5. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 \frac{x-1}{x+1} + \log_2(x^2 - 1) = 4$.
6. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3 x = \log_x 3$.
7. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_4(x^2 + 9) = \log_4 25$.
8. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(2x - 1) = 2$.
9. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2 - 6x + 6) = \log_3 1$.
10. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2 - 8x) = \log_3 9$.
11. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2 + 4) = \log_2 8$.
12. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2 - 4x + 4) = 0$.
13. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2 + 17) = \log_3 81$.
14. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_5(2x - 1) - \log_5 3 = 0$.
15. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_9(x^2 + 5) = 1$.
16. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(2x - 3) = \log_2(x + 1)$.
17. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x - 3) = 2$.
18. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2 - 2x) = 3$.
19. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(2x + 1) = \log_2 5$.
20. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 x^3 = 12 - \log_2 x$.