Structuri algebrice

1. Monoid

Fie (M,*), MxM→M, (x,y)→x*y, M-nevidã.

Axiomele monoidului:

M1. (x*y)*z = x*(y*z) $\forall x,y,z\in$ M (asociativitatea);

M2. $\exists\ e\in$ M astfel încât $x*e = e*x = x$, $\forall x\in$ M (e element neutru);

dacã M3. $x*y = y*x$, $\forall x,y\in$ M monidul este comutativ.

Ex: 1. (N,+), (N,·) sunt monoizi comutativi;

2. (F(E),o) monoid necomutativ (F(E) este mulţimea funcţiilor f:E→E, E – nevidã, o – compunerea funcţiilor).

2. Grup

Fie (G,*), GxG→G, (x,y)→x*y, G-nevidã.

Axiomele grupului:

G1. (x*y)*z = x*(y*z), $\forall x,y,z\in$ G(asociativitatea);

G2. $\exists\ e\in$ G astfel încât $x*e = e*x = x$, $\forall x\in$ G (e element neutru);

G3. $\forall\ x\in$ G $\exists\ x'\in$ G astfel încât $x'*x = x*x' = e$ (x' simetricul lui x);

dacã G4. $x*y = y*x$, $\forall x,y\in$ G grupul este comutativ (sau abelian).

Ex: 1. (Z,+), (Q,+), (R,+), (C,+) – grupuri comutative;

2. (R ,⊕) – grupul resturilor modulo n, comutativ;

3. (M (Z),+) – grupul matricilor pãtrate de ordin n cu elemente din Z;

4. (K, o) – grupul lui Klein (al simetriilor faţã de sistemul de coordonate), comutativ;

5. (σ , o) – grupul simetric de grad n (al permutãrilor de n elemente) nu este comutativ;

Definiţia 2.1. *Fie (G,*) grup, H⊂G, H este __subgrup__ dacã* $\forall\ x,y\in H \Rightarrow x*y\in H$ **şi** $\forall\ x\in H \Rightarrow x'\in H$ ***(x' este simetricul lui x în raport cu operaţia *)***;

Fie grupurile (G ,⊥), (G ,Δ):

Definiţia 2.2. f:G →G *se numeşte __morfism de grupuri__ dacã* $f(x\perp y)=f(x)\Delta f(y)$, $\forall x,y\in$ G .

Definiţia 2.3. f:G →G *se numeşte __izomorfism de grupuri__ dacã f este bijectivã şi* $f(x\perp y)=f(x)\Delta f(y)$, $\forall x,y\in$ G .

Definiţia 2.4. f:G →G *se numeşte __automorfism (endomorfism)__ al grupului G_1, dacã f este un izomorfism (morfism).*

3. Inel

Fie (A,+,•), AxA→A, (x,y)→x+y şi AxA→A, (x,y)→x•y, A nevidã;

Definiţia 3.1. (A,+,•) *este __inel__ dacã:*

G. (A,+) este grup abelian;

M. (A,•) este monoid şi

D. • este distributivã faţã de +:

$x\bullet(y+z) = x\bullet y + y\bullet z$

$(y+z)\bullet x = y\bullet x + y\bullet z$, $\forall x,y,z\in$ A

dacã C. $x\bullet y = y\bullet x\ \forall x,y\in$ **A, inelul este comutativ.**

Exemple de inele:

1. **(Z,+,·) – inelul numerelor întregi;**
2. **(Z[*i*],+, ·) – inelul întregilor lui Gauss, Z[*i*] = {*z* = *a* + *bi*| *a*,*b*∈Z}**
3. **(R ,⊕,⊗) – inelul resturilor modulo *n*;**
4. **(M (A),+,·) – inelul matricelor pãtratice (cu elemente din inelul *A*);**
5. **(Z ,+,·) – inelul claselor de resturi modulo *n*.**

Fie inelele (A,⊥,*) şi (A',Δ,o):

Definiţia 3.1. *f*:**A→A'** ***se numeşte <u>izomorfism de inele</u> dacã f este bijectivã şi*** $f(x\perp y) = f(x)\Delta f(y)$, $f(x*y) = f(x)$**o**$f(y)$, $\forall x,y\in$ **A.**

Definiţia 3.2. (A,+,•) ***este <u>inel fãrã divizori ai lui zero</u> dacã x≠0, y≠0 implicã x•y≠0.***

Definiţia 3.3. ***Un inel comutativ cu cel puţin douã elemente şi fãrã divizori ai lui zero se numeşte <u>domeniu integritate</u>.***

Definiţia 3.4. ***Dacã (A,+,·) este inel, atunci (A[X],+ ,·) este <u>inelul comutativ al polinoamelor cu coeficienţi în A</u>.***

f∈**A[X],** *f* = *a* + *a* **X** + *a* **X** + … + *a* **X** **este forma algebricã a unui polinom de nedeterminatã** *X* **cu coeficienţi în** *A*:

- **dacã** *a* **≠0, grad** *f* **=** *n* **(a – coeficient dominant);**
- **dacã** *a* **=** *a* **= … =** *a* **,** *f* **= 0 (polinom nul), grad 0 = -∞.**

Proprietãţi: **1. grad (***f*+*g***) ≤ max{grad** *f*, **grad** *g***};**

2. grad *f*·*g* ≤ **grad** *f* **+ grad** *g*.

Teoremã. Dacã *A* **este domeniu de integritate atunci** *A[X]* **este domeniu de integritate şi grad** *f*·*g* **= grad** *f* **+ grad** *g*, ∀*f*,*g*∈*A[X]*.

4. Corp

Fie (K,+,•), KxK→K, (*x***,***y***)→***x***+***y* **şi KxK→***k***, (***x***,***y***)→***x***•y, K – nevidã.**

Definiţia 4.1. ***(K,+,•) este <u>corp</u> dacã (K,+,•) este inel, 0≠1 şi*** ∀**x∈K, x≠0 ⇒ ∃ x ∈K,** ***astfel încât*** $x\bullet x^{-1} = x^{-1}\bullet x = 1$.

Dacã $x\bullet y = y\bullet x$, $\forall x,y\in$ **K, corpul este comutativ.**

Exemple de corpuri:

1. **(Q,+,·) – corpul numerelor raţionale;**
2. **(R,+, ·) – corpul numerelor reale;**
3. **(C,+, ·) – corpul numerelor complexe;**
4. **(Q($\sqrt{d}$),+,·) – corpul numerelor pãtratice (d∈Z, d – liber de pãtrate);**
5. **(Z ,+, ·) – corpul claselor de resturi modulo** *p* **(***p*∈**N*,** *p* **>1,** *p* **– numãr prim).**

Definiţia 4.2. ***Fie corpurile (K,⊥,*) şi (K',Δ,o), f:K→K' este izomorfism de corpuri dacã f este bijectivã,*** $f(x\perp y) = f(x)\ \Delta\ f(y)$, $f(x*y) = f(x)$ **o** $f(y)$ $\forall x,y\in$ **R.**

Legi de compoziţie Bacalaureat 2014-2016

Caz general

Fie pe R operaţia $x\circ y=axy-abx-aby+b(ab+1)$, $\forall x,y\in$R. Se cere:

1. **Să se arate că, $\forall x,y\in\mathbf{R}$ $x\circ y=a(x-b)(y-b)+b$;**
2. **Să se arate că $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$, $f(t)=a(t-b)$, este funcţie bijectivă care verifică totodată $f(x\circ y)=f(x)\cdot f(y)$, $\forall x,y\in$R;**
3. **În cazul alegerii $a>0$ considerând $H=(b;+\infty)$, respectiv în cazul alegerii $a<0$ considerând H $=(-\infty;b)$, să se arate că, $\forall x,y\in H$, are loc $x\circ y\in H$;**
4. **În cazul alegerii $a>0$ considerând H $=(b;+\infty)$, respectiv în cazul alegerii $a<0$ considerând H $=(-\infty;b)$, să se arate că $f:H\to\mathrm{R}_+^*$, $f(t)=a(t-b)$, este izomorfism de la $(H;\circ)$ la $(\mathrm{R}_+^*;\cdot)$;**
5. **Să se arate că, $\forall x,y\in$R, are loc x ∘ y = y ∘ x ;**
6. **Să se arate că $\exists$ x,y$\in$Q\ Z încât x∘y$\in$Z;**
7. **Să se arate că $\exists$ x,y$\in$R\ Q încât x∘y$\in$Z;**
8. **Să se arate că $\forall x,y,z\in$R, are loc (x ∘ y) ∘ z = x ∘ (y ∘ z) ;**
9. **Să se arate că $\exists e\in$R încât, $\forall x\in$R, verifică x ∘ e = e ∘ x = x ;**
10. **Să se arate că, $\forall x\in$R\{ b }, $\exists x'\in$R\{ b } încât $x\circ x'=x'\circ x=\dfrac{1}{a}+b$;**
11. **În cazul alegerii $a>0$, considerând H $=(b;+\infty)$, respectiv în cazul alegerii $a<0$, considerând H$=(-\infty;b)$, să se determine ce fel de structură este (H, ∘);**
12. **Să se rezolve ecuaţia $x\circ\left(\dfrac{1}{a}+b\right)\circ x=a\cdot A\cdot B+C$, $x\in(0,+\infty)$, unde A="an"-b-c, B="an"-b+c, C=ac +b, $\forall c\in$Z;**
13. **Să se arate că $\exists\theta\in$R încât $\forall x\in$R verifică x ∘ θ = θ ∘ x = θ;**
14. **Să se determine valoarea expresiei E=(-"an")∘(-"an"+1) ∘... ∘(-2) ∘(-1) ∘0 ∘1 ∘2 ∘... ∘("an"-1) ∘("an");**
15. **Să se arate că, $\forall x,y,z\in$R, $x\circ y\circ z=a\ (x-b)(y-b)(z-b)+b$;**
16. **Să se rezolve în R ecuaţia ("an"x -x+b)∘(x -"an"x+b)=b;**
17. **Să se rezolve în R ecuaţia (b-|b|+d^x)∘(log x)∘(b-1+C^x" ")=b, $\forall d\in$N, $d\geq 2$;**
18. **Să se arate că $\underbrace{A\circ A\circ\ldots\circ A}_{de\,n\,ori}=a^{n-}\cdot\left(A-b\right)^n+b$, $\forall n\in$N, A fiind un număr real liber ales, spre exemplu A = ”an”;**
19. **Să se determine cel mai mic număr $n\in$N* cu proprietatea (b+1)∘(b+2)∘(b+3)∘...∘$n\geq$ "an";**
20. **Să se rezolve în R ecuaţia $x\circ x\circ x\circ x\circ x=a\ \cdot A\ +b$, A fiind un număr real liber ales, spre exemplu A = ”an”.**

Rezolvare

1. **Se verifică imediat, prin calcul direct:**

   $x\circ y=a(x-b)(y-b)+b=a(xy-bx-by+b2\ )+b=axy-abx-aby+b(ab+1)$
2. **Justificarea bijectivităţii funcţiei $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}$, $f(t)=a(t-b)$, este imediată, ca funcţie de gradul întâi. Conform cu**

$x \circ y = a(x-b)(y-b)+b \Rightarrow x \circ y - b = a(x-b)(y-b) \mid \cdot a \Rightarrow a(x \circ y - b) = a(x-b) \cdot a(y-b)$ **este chiar cerinţa, respectiv** $f(x \circ y) = f(x) \cdot f(y)$.

3. **Fie** $x \in H \Rightarrow (x-b) \geq 0$ **şi** $y \in H \Rightarrow (y-b) \geq 0$ **şi atunci** $(x-b)(y-b) \geq 0$**, dar cum** a **este constantă nenulă şi de semn prestabilit, apartenenţa** $a(x-b)(y-b)+b = x \circ y \in H$ **este justificată.**
4. **Variaţia funcţiei** $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = a(t-b)$**, studiată anterior, arată imediat că restricţia** $f: H \to \mathbb{R}^*_+$ **este bijectivă. Tot din datele anterioare, este evident că** H **este parte stabilă a structurii (R;∘) (item 3) şi că are loc proprietatea de morfism +(item 2), izomorfismul fiind astfel demonstrat.**
5. **Comutativitatea este imediată**
6. **Luând** $x \circ y = a(x-b)(y-b)+b$ **şi alegând** $x-b = \frac{2}{3}$ **şi** $y-b = \frac{3}{2}$**, deoarece** $b \in \mathbb{Z}$**, evident** $x, y \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ **şi** $x \circ y = a+b \in \mathbb{Z}$.
7. **Pe aceeaşi idee, alegând** $x-b = \sqrt{2}-1$ **şi** $y-b = \sqrt{2}+1$**, se va obţine** $x, y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ **şi** $x \circ y = a+b \in \mathbb{Z}$**. Se observă că alegerea nu este unică, admiţând chiar o infinitate de posibilităţi.**
8. **Asociativitatea se demonstrează prin calcul**
9. **Din** $x \circ y = a(x-b)(y-b)+b$ **şi** $x \circ e = x$ **conduce la** $a(x-b)(e-b)+b = x$ **din care se obţine** $e = \frac{1}{a} + b$
10. **Dubla egalitate** $x \circ x' = x' \circ x = \frac{1}{a} + b$ **se reduce de fapt la** $x \circ x' = \frac{1}{a} + b$ **care se exprimă în forma** $a(x-b)(x'-b)+b = \frac{1}{a} + b$**, obţinând** $x' = b + \frac{1}{a\ (x-b)}$ **care este în mod evident din** $\mathbb{R} \setminus \{b\}$**, justificând afirmaţia din *item 10*.**
11. **Structura** $(H;\circ)$ **se dovedeşte grup comutativ, verificarea proprietăţilor fiind asigurată de concluzii anterioare.**
12. **Cum** $e = \frac{1}{a} + b,\ x \circ \left(\frac{1}{a} + b\right) \circ x = a \cdot A \cdot B + C$ **devine** $x \circ x = a \cdot A \cdot B + C$**, adică** $a(x-b) + b = a \cdot (\text{"an"} - b - c) \times (\text{"an"} - b + c) + ac + b$**. Observând diferenţa de pătrate, din** $a(x-b) = a \cdot [(\text{"an"} - b) - c\ ] + ac$ **se obţine** $(x-b) = (\text{"an"} - b)$ **şi în final** $x = \text{"an"}$**, în condiţia alegerii evidente** $2b - \text{"an"} < 0 < \text{"an"} - b$.
13. **Din** $x \circ y = a(x-b)(y-b)+b$ **se observă** $q = b$ **cu proprietatea menţionată,** $x \circ \theta = \theta \circ x = \theta$.
14. **Cum** $\theta = b$ **se regăseşte printre „factorii" ce compun expresia** E **, răspunsul la este** $E = \theta = b$.
15. **Se obţine prin calcul folosind** $x \circ y = a(x-b)(y-b)+b$.
16. **Ecuaţia** $(\text{"an"}x - x + b) \circ (x - \text{"an"}x + b) = b$ **devine** $(\text{"an"}x - x)(x - \text{"an"}x) = 0$ **şi răspunsul va fi** $x \in \left\{ 0; \text{"an"}; \frac{1}{\text{"an"}} \right\}$.
17. **Ecuaţia devine** $(d^x - |b|)(\log_d x - b)\left(C^x \quad -1\right) = 0$ **, deci** $x \in \left\{ \log_d |b|; d^b; 0; \text{"an"} \right\}$.
18. **Izomorfismul conduce imediat la** $x \circ x \circ ... \circ x_n = a^{n-} \cdot \prod_{k=}^{n} (x_k - b) + b$ **şi astfel identitatea** $\underbrace{A \circ A \circ ... \circ A}_{de\ n\ ori} = a^{n-} \ (A-b)^n + b$ **este evidentă.**

19. **$(b+1)\circ(b+2)\circ(b+3)\circ\ldots\circ n=a^{n\ b}\cdot(n-b)!+b$ şi astfel se determină imediat răspunsul.**

20. **$x\circ x\circ x\circ x\circ x=a\cdot(x-b)+b$ şi $a\cdot(x-b)+b=a\cdot A+b$ soluţia $x=A+b$.**

Exemplul (corespunzător alegerii a=1, b=5, c=5 şi d=2)

Fie pe R operaţia $x\circ y=xy-5x-5y+30, \forall x,y\in \mathrm{R}$. Se cere:

1) Să se arate că, $\forall$ x,y$\in$R, $x\circ y=(x-5)(y-5)+5$;

2) Să se arate că $f:\mathrm{R}\to\mathrm{R}, f(t)=t-5$, este funcţie bijectivă, care verifică totodată $f(x\circ y)=f(x)\cdot f(y), \forall x,y\in\mathrm{R}$.

3) Considerând H = (5;+ ∞), să se arate că, $\forall x,y\in H$, are loc $x\circ y\in H$;

4) Considerând H = (5;+ ∞), să se arate că $f:H\to\mathrm{R}_+^*, f(t)=t-5$, este izomorfism de la $(H;\circ)$ la (R ;·);

5) Să se arate că, $\forall x,y\in\mathrm{R}$, are loc $x\circ y=y\circ x$;

6) Să se arate că $\exists\ x,y\in$ Q\Z încât $x\circ y\in$ Z;

7) Să se arate că $\exists\ x,y\in$ R\ Q încât $x\circ y\in$ Z;

8) Să se arate că, $\forall$ x,y,z $\in$R, are loc $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$;

9) Să se arate că $\exists e\in$R încât $\forall x\in$R verifică $x\circ e=e\circ x=x$;

10) Să se arate că, $\forall x\in$R\{ 5 }, $\exists x'\in$R\{5} încât $x\circ x'=x'\circ x=6$;

11) Considerând H = (5;+ ∞), să se determine ce fel de structură este (H, $\circ$);

12) Să se rezolve ecuaţia $x\circ 6\circ x=1999\cdot 2009+30$, x$\in(0,+\infty)$;

13) Să se arate că $\exists\theta\in$R încât $\forall x\in$R verifică x $\circ\ \theta=\theta\circ$ x = θ;

14) Să se determine valoarea expresiei
$E=(-2009)\circ(-2008)\circ\ldots\circ(-2)\circ(-1)\circ0\circ1\circ2\circ\ldots\circ2008\circ2009$;

15) Să se arate că, $\forall x,y,z\in$R, $x\circ y\circ z=(x-5)(y-5)(z-5)+5$;

16) Să se rezolve în R ecuaţia $(2009x\ -x+5)\circ(x\ -2009x+5)=5$;

17) Să se rezolve în R ecuaţia $(2^x)\circ(\log\ x)\circ(4+C^x_{2009})=5$;

18) Să se arate că $\underbrace{2009\circ2009\circ\ldots\circ2009}_{de\qquad ori}=2004\qquad+5$

19) Să se determine cel mai mic număr $n\in\mathrm{N}^*$, cu proprietatea $6\circ7\circ8\circ\ldots\circ n\geq2009$;

20) Să se rezolve în R ecuaţia $x\circ x\circ x\circ x\circ x=2009\ +5$

Rezolvare

1. **Se calculează $(x-5)(y-5)+5=xy-5x-5y+25+5=xy-5x-5y+30=x\circ y$**
2. **Funcţie de gradul I, bijectivă.**
   $f(x\circ y)=f((x-5)(y-5)+5)=(x-5)(y-5)+5-5=(x-5)(y-5)=f(x)\cdot f(y)$.
3. $\left.\begin{array}{l} x\in H\Rightarrow x>\mathbf{5}\Rightarrow x-\mathbf{5}>\mathbf{0}\\ y\in H\Rightarrow y>\mathbf{5}\Rightarrow y-\mathbf{5}>\mathbf{0}\end{array}\right\}\Rightarrow(x-\mathbf{5})(y-\mathbf{5})>\mathbf{0}\Big|+\mathbf{5}\Rightarrow(x-\mathbf{5})(y-\mathbf{5})+\mathbf{5}>\mathbf{5}\quad\Rightarrow$
   $x\circ y>5\Rightarrow x\circ y\in H$
4. **Calculând $f'(t)=1>0\Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(5,\infty)$ şi deci bijectivă pe $(5,\infty)$. Morfismul este demonstrat la itemul 2.**
5. **$x\circ y=xy-5x-5y+30=yx-5y-5x+30=y\circ x$**

6. Alegem x-5=$\frac{2}{3}$ şi y-5= $\frac{3}{2}$ obţinem $x=\frac{2}{3}+5=\frac{17}{3}\in Q\setminus Z$ şi $y=\frac{3}{2}+5=\frac{13}{2}\in Q\setminus Z$ şi calculăm

$$\frac{17}{3}\circ\frac{13}{2}=\left(\frac{17}{3}-5\right)\left(\frac{13}{2}-5\right)+5=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}+5=1+5=6\in Z.$$

7. Alegem x-5= $\sqrt{2}$ -1 şi y-5= $\sqrt{2}$ +1 $\Rightarrow$ x= $\sqrt{2}$ +4$\in$R\Q şi y= $\sqrt{2}$ +6$\in$R\Q şi calculăm

$$\left(\sqrt{2}+4\right)\circ\left(\sqrt{2}+6\right)=\left(\sqrt{2}+4-5\right)\cdot\left(\sqrt{2}+6-5\right)+5=$$

$$=\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)+5=2-1+5=6\in Z.$$

8. Asociativitatea:

$(x\circ y)\circ z$=[(x-5)(y-5)+5]$\circ z$=[(x-5)(y-5)+5-5](z-5)+5=(x-5)(y-5)(z-5)+5

$x\circ(y\circ z)$ =$x\circ$[(y-5)(z-5)+5]=(x-5)[(y-5)(z-5)+5-5]+5=(x-5)(y-5)(z-5)+5

9. Elementul neutru $x\circ e$=x $\Rightarrow$ xe-5x-5e+30=x $\Rightarrow$ xe-5e=6x-30 $\Rightarrow$ e(x-5)=6(x-5) $\Rightarrow$ e=6$\in H$.

10. $x\circ x'$=6$\Rightarrow$ xx'-5x-5x'+30=6 $\Rightarrow$$xx'-5x'$=5$x$-24 $\Rightarrow$$x'$($x$-5)=5$x$-24 $\Rightarrow$

$$x'=\frac{5x-24}{x-5}=\frac{5x-25+1}{x-5}=\frac{5(x-5)-1}{x-5}=5-\frac{1}{x-5}\neq 5\Rightarrow x'\in R\setminus\{5\}$$

11. Din 5) H este parte stabilă, din 8) rezultă asociativitatea, din 9) elementul neutru, din 9) elementul simetric şi din 5) comutativitatea $\Rightarrow$ (H,$\circ$) formează o structură de grup comutativ.

12. $x\circ 6\circ x$=(x-5)(6-5)(x-5)+5 şi obţinem (x-5) +5=1994$\cdot$2005+30 $\Rightarrow$ (x-5) =(1999-5)(1999+5)+25 $\Rightarrow$ (x-5) =1999 -25+25 $\Rightarrow$ (x-5) =1999 $\Rightarrow$ x+5=$\pm$ 1999 $\Rightarrow$ x =1994 şi x =-2004.

13. Determinăm pe θ astfel încât θ-5=0 $\Rightarrow$ θ=5. Verificăm: $x\circ$5=(x+5)(θ-5)+5=5.

14. Conform itemului 13) $x\circ$5=5 şi în şirul care se compune există numîrul 5, deci E=(-2009)$\circ$(-2008)$\circ$...$\circ$(-2)$\circ$(-1)$\circ$0$\circ$1$\circ$2$\circ$...$\circ$2008$\circ$2009=5

15. Exprimarea de la acest punct s-a demonstrat la itemul 8).

16. (2009x -x+5)$\circ$(x -2009x+5)=5 $\Rightarrow$ [(2009x -x+5)-5][(x -2009x+5)-5]+5=5 $\Rightarrow$ (2009x -x)(x -2009x)=0 $\Rightarrow$ x(2009x-1)(x-2009)=0 $\Rightarrow$ $x\in\left\{0;\frac{1}{2009};2009\right\}$.

17. Conform punctului 15) $\Rightarrow$

(2^x)$\circ$(log x)$\circ$(4+$C^x{}_{2009}$)= (2^x-5)(log x-5)(4+$C^x{}_{2009}$-5)+5=5 $\Rightarrow$

2^x-5=0 $\Rightarrow$ x =log 5

log x-5=0 $\Rightarrow$ x =2

$C^x\quad -1=0\Rightarrow C^x\quad =1\Rightarrow x$ =0 sau x =2009.

18. Generalizând punctul 8) se obţine

$$\underbrace{2009\circ 2009\circ\ldots\circ 2009}_{de\qquad ori}=\underbrace{\left(2009-5\right)\cdot\left(2009-5\right)\cdot\ldots\cdot\left(2009-5\right)}_{de\qquad ori}+5=2004\qquad +5$$

19. 6$\circ$7$\circ$8$\circ$...$\circ n$=(5+1-5)$\cdot$(5+2-5)$\cdot$(5+3-5)$\cdot$... $\cdot$(n-5)+5=1$\cdot$2$\cdot$3$\cdot$...$\cdot$(n-5)+5=(n-5)!+5 se obţine (n-5)!+5$\geq$2009 $\Rightarrow$ (n-5)!$\geq$2004. Ştim 6!=720 şi 7!=5040, deci n=7.

20. $x\circ x\circ x\circ x\circ x$=($x$-5)($x$-5)($x$-5)($x$-5)($x$-5)+5=($x$-5) +5 $\Rightarrow$ (x-5) +5 = 2009 +5 $\Rightarrow$ (x-5) =2009 $\Rightarrow$ x-5=2009 $\Rightarrow$ x=2014.

Probleme propuse

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2$.

a) **Arătați că** $(-1) \circ 1 = -1$.

b) **Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația** $x \circ x = x$.

c) **Determinați perechile** (a,b) **de numerele întregi, știind că** $a \circ b = 8$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă

$x \circ y = xy + 3x + 3y + 6$.

a) **Arătați că** $0 \circ (-3) = -3$.

b) **Arătați că** $x \circ y = (x+3)(y+3) - 3$, **pentru orice numere reale** x **și** y.

c) **Arătați că** $(-3) \circ x = -3$, **pentru orice număr real** x.

d) **Verificați dacă** $e = -2$ **este element neutru al legii de compoziție „**$\circ$**”.**

e) **Calculați** $(-2016) \circ (-2015) \circ \ldots \circ (-3)$.

f) **Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația** $x \circ x \circ x = 5$.

3. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă

$x * y = xy - x - y + 2$.

a) **Arătaţi că** $x * y = (x-1)(y-1) + 1$, **pentru orice numere reale** x **şi** y.

b) **Calculaţi** $0 * 1 * 2 * 3$.

c) **Determinaţi numerele reale** a, **ştiind că** $a * a * 2016 = 2016$.

4. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă

$x \circ y = 6xy - 2x - 2y + 1$.

a) **Calculați** $1 \circ \frac{1}{3}$

b) **Determinaţi elementul neutru al legii de compoziţie „**$\circ$**”.**

c) **Calculați** $\frac{1}{1008} \circ \frac{2}{1008} \circ \frac{3}{1008} \circ \ldots \circ \frac{2016}{1008}$

5. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x \circ y = xy + x + y$.

a) **Calculaţi** $(-2) \circ 2$.

b) **Arătați că** $x \circ y = (x+1)(y+1) - 1$, **pentru orice numere reale** x **şi** y.

c) **Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația** $x \circ x = -1$.

d) **Verificați dacă legea de compoziţie „**$\circ$**” este asociativă.**

e) **Demonstraţi că numărul** $n \circ n$ **este multiplu de 8, pentru orice număr natural par** n.

f) **Dați un exemplu de două numere iraționale** a **și** b, **pentru care** $a \circ b \in \mathbb{N}$.

6. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă

$x * y = xy - 4x - 4y + 20$.

a) **Arătaţi că** $x * y = (x-4)(y-4) + 4$, **pentru orice numere reale** x **şi** y.

b) **Calculați** $1 * 2 * 3 * * 2016$.

c) **Determinaţi numerele naturale** a, b **şi** c, **ştiind că** $a < b < c$ **și** $a * b * c = 66$.

7. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$.

a) **Arătaţi că** $1 \circ (-2) = -2$.

b) **Demonstrați că** $x \circ y = (x+2)(y+2) - 2$, **pentru orice numere reale** x **și** y.

c) **Determinați numerele reale nenule** x, **pentru care** $x \circ \frac{1}{x} = x$

8. Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție asociativă

$x * y = -2xy + 10x + 10y - 45$.

a) **Arătați că** $x * y = -2(x-5)(y-5)+5$, **pentru orice numere reale** x **şi** y.

b) **Arătați că** $1*2*3*4*5*6*7*8*9*10=5$.

c) **Determinaţi numerele naturale** m **şi** n, **pentru care** $m*n=27$.

9. Pe mulţimea numerelor reale se defineste legea de compoziţie dată de

$x \circ y = -xy + x + y$.

a) **Calculaţi** $1 \circ 2015$.

b) **Arătați că** $x \circ y = -(x-1)(y-1)+1$, **pentru orice numere reale** x **si** y.

c) **Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia** $3 \circ 5 = 1$.

10. Pe mulţimea numerelor reale se defineste legea de compoziţie $x \circ y = x + y - 2$.

a) **Calculați** $(-2) \circ 2$.

b) **Arătați că legea de compoziţie „$\circ$" este asociativă.**

c) **Verificaţi dacă** $e=2$ **este element neutru al legii de compoziţie „$\circ$".**

d) **Determinaţi numărul real** x, **ştiind că** $(x+1) \circ x = 3$.

e) **Rezolvaţi în mulțimea numerelor reale ecuaţia** $9^x \circ 3^x = 0$

f) **Arătaţi că** $x \circ \frac{1}{x} \geq 0$ **pentru orice număr real nenul** x.

11. Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție asociativă

$x * y = xy - 7x - 7y + 56$.

a) **Arătați că** $(-7)*7=7$.

b) **Arătați că** $x * y = (x-7)(y-7)+7$, **pentru orice numere reale** x **şi** y.

c) **Calculați** $1*2*3*\cdots*2015$.

12. Pe mulţimea numerelor reale se defineste legea de compoziţie asociativă

$x \circ y = xy - 3(x+y) + 12$.

a) **Arătaţi că** $x \circ 3 = 3 \circ x = 3$, **pentru orice număr real** x.

b) **Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia** $x \circ x = x$.

c) **Calculaţi** $1 \circ 2 \circ ... \circ 2014$.

13. Pe mulţimea numerelor reale se defineste legea de compoziţie dată de $x \circ y = x + y - 1$.

a) **Calculaţi** $2 \circ 3$.

b) **Verificaţi dacă legea de compoziție „$\circ$" este comutativă.**

c) **Arătaţi că legea de compoziţie „$\circ$" este asociativă.**

d) **Determinaţi numerele reale** x **pentru care** $x \circ x = 11$

e) **Arătaţi că** $x \circ (x+2014) = (x+1012) \circ (x+1012)$, **pentru orice număr real** x.

f) **Determinaţi numărul real nenul** x **pentru care** $x \circ \frac{1}{x} = 1$

14. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = 2(x+y-1) - xy$.

a) **Arătaţi că** $1*2=2$.

b) **Arătaţi că** $x*2=2*x=2$ **pentru orice număr real** x.

c) **Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia** $x*x=x$.

15. Pe mulțimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x \circ y = 2xy - 3x - 3y + 6$.

a) **Calculați** $1 \circ 2$.

b) Arătaţi că $x \circ y = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(y - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2}$ **pentru orice numere reale** x **şi** y.

c) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x \circ x = 2$.

16. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = xy - 5x - 5y + 30$.

a) Arătaţi că $1*5 = 5$.

b) Arătaţi că $x * y = (x - 5)(y - 5) + 5$ **pentru orice numere reale** x **şi** y.

c) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x * x = x$.

17. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă

$x * y = 3x + 3y - xy - 6$.

a) Calculaţi $1*3$.

b) Arătaţi că $x * y = 3 - (x - 3)(y - 3)$ **pentru orice numere reale** x **şi** y.

c) Determinaţi numerele reale x **pentru care** $\underbrace{x*x*...*x}_{x\,de\quad ori} = x$.

18. Pe mulţimea numerelor întregi se definesc legile de compoziţie $x * y = x + y - 3$ **şi**

$x \circ y = (x - 3)(y - 3) + 3$.

a) Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi ecuaţia $x * x = x \circ x$.

b) Să se determine numărul întreg a **care are proprietatea că** $x \circ a = 3$**, oricare ar fi numărul întreg** x.

c) Să se rezolve sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x * (y+1) = 4 \\ (x - y) \circ 1 = 5 \end{cases}$**, unde** $x, y \in \mathbb{Z}$.

19. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă

$x \circ y = 2xy - 6x - 6y + 21$.

a) Arătaţi că $x \circ y = 2(x-3)(y-3) + 3$**, pentru orice numere reale** x **şi** y.

b) Arătaţi că $1 \circ 2 \circ 3 \circ 4 = 3$.

c) Determinaţi numerele reale x**, pentru care** $x \circ x \circ x = x$.

20. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = x + y - 5$.

a. Arătaţi că $(-2) * 7 = 0$.

b. Arătaţi că legea de compoziţie „*" este asociativă.

c. Arătaţi că $(1*2)*(8*9) = (1*9)*(2*8)$.

d. Determinaţi numărul real x**, pentru care** $(x * x) * x = x$.

e. Determinaţi numărul real x**, pentru care** $9^x * 3^x = 7$.

f. Demonstraţi că $x * \frac{1}{x} \geq -3$**, pentru orice număr real nenul** x.