Elemente de analiză matematică, clasa a XI-a

Limite de funcţii

Notaţii: $f:D\to\mathbf{R}$, $D\subset\mathbf{R}$, α **- punct de acumulare a lui** D;

Definiţii ale limitei

Definiţia 1.1. $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=l, l\in\overline{\mathbf{R}}$, **dacă pentru orice vecinătate** V **a lui** l **există o vecinătate** U **a lui** α **astfel încât** $\forall\ x\in D\cap U, x\neq\alpha$, **să rezulte** $f(x)\in V$.

Definiţia 1.2. $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=l, l\in\overline{\mathbf{R}}$, **dacă pentru orice şir** $(x_n)_{n\geq}$, $x_n\in D\setminus\{\alpha\}$, **având** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\alpha$ **rezultă** $\lim\limits_{n\to\infty} f(x)=l$ **(criteriul cu şiruri);**

Definiţia 1.3. $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=l, l\in\overline{\mathbf{R}}$, **dacă** $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta_\varepsilon>0$ **astfel încât** $\forall x\in D\setminus\{\alpha\}$ **şi** $|x-\alpha|<\delta_\varepsilon$ **rezultă** $|f(x)-l|<\varepsilon$;

Definiţia 1.4. $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=l$, **dacă** $l_s=l_d=l$, **unde** $l_s=\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\x<\alpha}} f(x)$ **şi** $l_d=\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\x>\alpha}} f(x)$.

Operaţii cu limite de funcţii

$f:D\to\mathbf{R}$, $g:D\to\mathbf{R}$, α **- punct de acumulare a lui** D, $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=l$, $\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)=l$, $l_1,l_2\in\mathbf{R}$;

1. $\lim\limits_{x\to\alpha}(f(x)+g(x))=l\ +l$;

2. $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\cdot g(x)=l\ \cdot l$;

3. $\lim\limits_{x\to\alpha} af(x)=a\cdot l$;

4.daca $l\ \neq 0$, $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{l}{l}$.

Limite tip

1. $\lim\limits_{x\to\alpha}(a\ x^n+a\ x^{n-}\ +\dots+a_n)=a\ \alpha^n+a\ \alpha^{n-}\ +\dots+a_n$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}(a\ x^n+a\ x^{n-}\ +\dots+a_n)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} a\ x^n$;

2. $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{a\ x^n+a\ x^{n-}\ +\dots+a_n}{b\ x^m+b\ x^{m-}\ +\dots+b_m}=\dfrac{a\ \alpha^n+a\ \alpha^{n-}\ +\dots+a_n}{b\ \alpha^m+b\ \alpha^{m-}\ +\dots+b_m}$

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{a\ x^n+a\ x^{n-}\ +\dots+a_n}{b\ x^m+b\ x^{m-}\ +\dots+b_m}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{a\ x^n}{b\ x^m}$;

3. $\lim\limits_{x\to\alpha}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{\alpha}, \alpha\in R_+, n\in N, n\geq 2$; $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[n]{x}=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[n+]{x}=-\infty$;

4. $\lim\limits_{x\to\alpha} a^x=a^\alpha, \alpha\in R, a\in R_+\setminus\{1\}$; $\lim\limits_{x\to\infty} a^x=\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x=0$, **dacă** $a>1$;

$\lim\limits_{x\to\infty} a^x = \mathbf{0}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \infty$, **dacă 0 <** a **< 1;**

5. $\lim\limits_{x\to\alpha}\log_a x = \log_a \alpha, \alpha > 0$ **finita,** $\alpha \in R_+ \setminus \{1\}$; $\lim\limits_{\substack{x\to \\ x>}}\log_a x = -\infty$ **şi** $\lim\limits_{x\to\infty}\log_a x = +\infty$ **dacă**

a **>1;** $\lim\limits_{\substack{x\to \\ x>}}\log_a x = +\infty$ **şi** $\lim\limits_{x\to\infty}\log_a x = -\infty$ **dacă 0 <**a**< 1;**

6. $\lim\limits_{x\to\alpha}\sin x = \sin\alpha$, $\lim\limits_{x\to\alpha}\cos x = \cos\alpha$; $\lim\limits_{x\to\alpha} tgx = tg\alpha, \alpha \notin \frac{\pi}{2} + \pi Z$, $\lim\limits_{x\to\alpha} ctgx = ctg\alpha, \alpha \notin \pi Z$;

$\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{} \\ x<\frac{\pi}{}}} tgx = \infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{\pi}{} \\ x>\frac{\pi}{}}} tgx = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to \\ x>}} ctgx = \infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to \\ x<}} ctgx = -\infty$;

7. $\lim\limits_{x\to\alpha}\arcsin x = \arcsin\alpha, \alpha \in [-1,1]$, $\lim\limits_{x\to\alpha}\arccos x = \arccos\alpha, \alpha \in [-1,1]$;

$\lim\limits_{x\to\alpha} arctgx = arctg\alpha, \alpha \in R$, $\lim\limits_{x\to\alpha} arcctgx = arcctg\alpha, \alpha \in R$; $\lim\limits_{x\to-\infty} arctgx = -\frac{\pi}{2}$,

$\lim\limits_{x\to\infty} arctgx = \frac{\pi}{2}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} arcctgx = \pi$, $\lim\limits_{x\to\infty} arcctgx = \mathbf{0}$;

8. $\lim\limits_{x\to}\frac{\sin x}{x} = \mathbf{1}$, $\lim\limits_{x\to}\frac{tgx}{x} = \mathbf{1}$, $\lim\limits_{x\to}\frac{\arcsin x}{x} = \mathbf{1}$, $\lim\limits_{x\to}\frac{arctgx}{x} = \mathbf{1}$;

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^n}{a^x} = \mathbf{0}, \forall n \in Z, a > 1$;

10. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \lim\limits_{x\to}(1+x)^{\frac{}{x}} = e$;

11. $\lim\limits_{x\to}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$;

12. $\lim\limits_{x\to}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a, a > \mathbf{0}$,

13. $\lim\limits_{x\to}\frac{(1+x)^r - 1}{x} = r, \forall r \in R$.

Continuitatea funcţiilor

Definiţia 1. Fie $f{:}D\to\mathbf{R}$, $x_o\in D$, x_o–**punct de acumulare a lui** D, f **este continuã în** x , **dacã** $\lim\limits_{\substack{x\to x \\ x<x}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x \\ x>x}} f(x) = \lim\limits_{x\to x} f(x) = f(x\ )$, **iar** x_o **se numeşte punct de continuitate.**

Definiţia 2. Fie $\alpha\in D$, α **este punct de discontinuitate de prima speţã dacã existã şi sunt finite limitele laterale în** α, **dar funcţia nu este continuã în** α.

Definiţia 3. Fie $\alpha\in D$, α **este punct de discontinuitate de speţa a doua dacã nu este de prima speţã.**

Teoremã. Dacã $f{:}I\to\mathbf{R}$, I **– interval şi** f **continuã pe** I, **atunci** $J = f(I)$ **este interval (o funcţie continuã pe un interval are proprietatea lui Darboux pe acel interval).**

Funcţii derivabile

Definiţia derivatei într-un punct

$f: E\to\mathbf{R}$, $x_o\in E$, x_o – **punct de acumulare a lui** E:

- $\lim\limits_{x\to x}\frac{f(x) - f(x\ )}{x - x} = f\,'(x\ )$ **existã şi este finitã**

- $f_s'(x\ ) = \lim\limits_{\substack{x \to x \\ x<x}} \dfrac{f(x) - f(x\ )}{x - x}$
- $f_d'(x\ ) = \lim\limits_{\substack{x \to x \\ x>x}} \dfrac{f(x) - f(x\ )}{x - x}$
- **o funcţie este derivabilă într-un punct x** $\Leftrightarrow f'(x\ ) = f_s'(x\ ) = f_d'(x\ )$

  Interpretarea geometrică:

- **dacă** $f'(x\ ) \in$ **R, atunci aceasta reprezintă** panta tangentei **la graficul funcţiei în punctul** x **,** $m = f'(x_0)$.
- **dacă** $f'(x\ ) \in$ **R,** $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ **este** ecuaţia tangentei **la graficul funcţiei** f **în punctul** $A(x\ , f(x\ ))$**;**
- **dacă** f **este continuă în** x **,** $f_d'(x\ ) = +\infty$, $f_s'(x\ ) = -\infty$**, sau invers,** x **este** punct de întoarcere **al graficului;**
- **dacă** f **este continuă în** x **şi există derivatele laterale în** x **, cel puţin una fiind finită, dar** f **nu este derivabilă în** x **,** x **este** punct unghiular **al graficului.**

Reguli de derivare

$f, g: E \to$ **R,** f, g **derivabile în** $x \in E$**:**

1. $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$;
2. $(cf)'(x) = cf'(x)$, $c \in$ **R;**
3. $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
4. **dacă** $g(x) \neq 0$, $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g\ \ (x)}$;
5. derivata funcţiei compuse: **dacă** $f: I \to J$, $g: J \to$ **R,** f **derivabilă în** $x\ \in I$ **şi** g **derivabilă în** $y_0 = f(x_0)$**, atunci** $(g \circ f)'(x\ ) = g'(y\ )f'(x\ )$**;**
6. derivate funcţiei inverse: **dacă** $f: I \to J$ **continuă, bijectivă şi derivabilă în** x_0 **cu** $f'(x\ ) \neq 0$**, atunci** $f\ \ : J \to I$ **este derivabilă în** $y\ = f(x\ )$ **şi** $f\ \ (y\ ) = \dfrac{1}{f'(x\ )}$.

Definiţie: Punctele critice **ale unei funcţii derivabile sunt rădăcinile (zerourile) derivatei întâi.**

Derivate de ordin superior

Fie f**:I**$\subset$**R**$\to$**R,** $x\ \in$ **I, o funcţie derivabilă. Spunem că f este de două ori derivabilă în x dacă există şi este finită:**

$$\lim_{x \to x} \frac{f'(x) - f'(x\ )}{x - x} = f''(x\ )$$

Derivatele funcţiilor elementare

Funcţia (condiţii)	**Derivata (condiţii)**
c, *(constanta)*	0
x^n, $n\in\mathbf{N}^*$	nx^{n-1}
x^r, $r\in\mathbf{R}$, $x>0$	rx^{n-1}
$\sqrt{x}$, $x\geq 0$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}, x>0$
$\log_a x$, $a\neq 1$, $a>0$, $x>0$	$\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{1}{x}$
$\ln x$, $x>0$	$\frac{1}{x}$
a^x, $a\neq 1$, $a>0$, $x>0$	$a^x \ln a$
e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\text{tg}\, x$, $x\neq(2k+1)\frac{\pi}{2}, k\in Z$	$\frac{1}{\cos\ x}$
$\text{ctg}\, x$, $x\neq k\pi, k\in Z$	$-\frac{1}{\sin\ x}$
$\arcsin x$, $x\in[-1,1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x}}$, $x\in(-1,1)$
$\text{arcos}\, x$, $x\in[-1,1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x}}$, $x\in(-1,1)$
$\text{arctg}\, x$	$\frac{1}{1+x}$
$\text{arcctg}\, x$	$-\frac{1}{1+x}$

Derivatele funcţiilor compuse

Funcţia (condiţii)	**Derivata (condiţii)**
u^n, $n\in\mathbf{N}^*$	$nu^{n-1}\cdot u'$
u^r, $r\in\mathbf{R}$, $u>0$	$ux^{n-1}\cdot u'$
$\sqrt{u}, u\geq 0$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}, u>0$
$\log_a u$, $a\neq 1$, $a>0$, $u>0$	$\frac{1}{\ln a}\cdot\frac{u'}{u}$
$\ln u$, $u>0$	$\frac{1}{u}\cdot u'$
a^u, $a\neq 1$, $a>0$	$a^u \ln a\cdot u'$
e^u	$e^u\cdot u'$
$\sin u$	$\cos u\cdot u'$
$\cos u$	$-\sin u\cdot u'$
$\text{tg}\, u$, $\cos u\neq 0$	$\frac{1}{\cos\ u}\cdot u'$
$\text{ctg}\, u$, $\sin u\neq 0$	$-\frac{1}{\sin\ u}\cdot u'$
$\arcsin u$, $u\in[-1,1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-u}}\cdot u'$, $u\in(-1,1)$
$\arccos u$, $u\in[-1,1]$	$-\frac{1}{\sqrt{1-u}}\cdot u'$, $u\in(-1,1)$
$\text{arctg}\, u$	$\frac{1}{1+u}\cdot u'$
$\text{arcctg}\, u$	$-\frac{1}{1+u}\cdot u'$

Proprietăţi ale funcţiilor derivabile

Definiţie: Fie $f:I\to R$, cu $I\subset R$, interval.

1. Spunem că punctul $x \in I$ este un punct de maxim local strict pentru f, dacă există o vecinătate U a lui x , astfel încât: $f(x) < f(x\ ),\ \forall x\in U\cap\left(I\setminus\{x\ \}\right)$.

2. . Spunem că punctul $x \in I$ este un punct de minim local strict pentru f, dacă există o vecinătate U a lui x , astfel încât: $f(x) > f(x\ ),\ \forall x\in U\cap\left(I\setminus\{x\ \}\right)$.

Teorema lui Fermat:

Fie $f:I\to R$ derivabilă pe I. În orice punct extrem local din interiorul lui I, f' este nulă.

Teorema lui Rolle:

Dacă funcţia continuă $f:[a,b]\to R$ este derivabilă pe (a,b) şi $f(a) = f(b)$ atunci există $c\in(a,b)$ astfel încât $f'(c) = 0$.

Teorema lui Lagrange:

Dacă funcţia continuă $f:[a,b]\to R$ este derivabilă pe (a,b), atunci există $c\in(a,b)$ astfel încât $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$.

Consecinţe ale Teoremei lui Lagrange:

1. **Fie $f:E\to R$ o funcţie derivabilă şi $I\subset E$ un interval.**
   - **Dacă $\forall x\in I$, avem $f'(x)>0$, atunci funcţia este strict crescătoare pe I.**
   - **Dacă $\forall x\in I$, avem $f'(x)<0$, atunci funcţia este strict descrescătoare pe I.**
2. **Fie $f:(a,b) \to R$ o funcţi derivabilă şi $c\in(a,b)$. Dacă f' se anulează în c schimbându-şi semnul, atunci c este un punct de extrem local pentru f.**

Teoremă. Dacă funcţia f este continuă şi derivabilă pe I (I – interval deschis), atunci:

1. **între două rădăcini consecutive ale funcţiei există cel puţin o rădăcină a derivatei;**
2. **între două rădăcini consecutive ale derivatei există cel mult o rădăcină a funcţiei.**

Teorema lui Cauchy:

Dacă $f,g:[a,b]\to R$ continue pe $[a,b]$, derivabile pe (a,b) şi $g'(x)\neq 0$, $\forall x\in(a,b)$ atunci $\exists c\in(a,b)$ astfel încât $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

Funcţii convexe şi funcţii concave

1. **O funcţie este convexă pe un interval real (a,b), dacă pentru $\forall x\ ,x\ \in(a,b)$ graficul funcţiei pe intervalul $(x\ ,x\ )$ este situat sub segmentul de dreaptă care uneşte punctele $(x\ ,f(x\ ))$ şi $(x\ ,f(x\ ))$.**
2. **O funcţie este concavă pe un interval real (a,b), dacă pentru $\forall x\ ,x\ \in(a,b)$ graficul funcţiei pe intervalul $(x\ ,x\ )$ este situat desupra segmentului de dreaptă care uneşte punctele $(x\ ,f(x\ ))$ şi $(x\ ,f(x\ ))$.**

Propoziţia

1. **Dacă funcţia f are derivată de ordinul al doilea strict pozitivă ($f'(x)>0$) pe intervalul (a,b), atunci f este strict convexă pe (a,b).**

2. **Dacă funcţia f are derivată de ordinul al doilea strict negativă ($f\,'(x)<0$) pe intervalul (a,b), atunci f este strict concavă pe (a,b).**

Asimptote

1. Asimptote orizontale (f:$D\to$R)

Definiţia 1. Dacă $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$ **sau** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$ **,** $l_l\in$**R şi/sau** $l\in$**R, dreptele** $y=l$ **şi/sau** $y=l$ **sunt asimptote orizontale a lui** f **spre** $+\infty$**, respectiv** $-\infty$

2. Asimptote oblice (f:$D\to$R)

Definiţia 2. Dacă $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=m\neq 0$ **şi** $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-mx]=n, m, n\in R$ **dreapta** $y=mx+n$ **este asimptotă oblică a lui** f **spre** $+\infty$**.**

Definiţia 3. Dacă $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=m'\neq 0$ **şi** $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-m'x]=n', m', n'\in R$ **dreapta** $y=m'x+n'$ **este asimptotă oblică a lui** f **spre** $-\infty$**.**

3. Asimptote verticale (f:$D\to$R)

Definiţia 4. Dacă $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\ x<\alpha}} f(x)=\pm\infty$, α **- punct de acumulare a lui** D**, dreapta** $x=\alpha$ **este asimptotă verticală la stânga a lui** f**.**

Definiţia 5. Dacă $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\ x>\alpha}} f(x)=\pm\infty$, α **- punct de acumulare a lui D, dreapta** $x=\alpha$ **este asimptotă verticală la dreapta a lui** f**.**

Regulile lui l'Hospital

Fie I **un interval pe axa reală şi** x **un punct de acumulare al lui** I**. Fie** f **şi** g **două funcţii definite pe** $I-\{x\}$**. Dacă:**

1. $\lim\limits_{x\to x} f(x)=\lim\limits_{x\to x} g(x)=0$;
2. f **şi** g **sunt derivabile pe** $I-\{x\}$**;**
3. $g'(x)\neq 0,\ \forall x\in I\setminus\{x\}$;
4. **există** $\dfrac{\lim\limits_{x\to x} f'(x)}{\lim\limits_{x\to x} g'(x)}=l, l\in$ **R, atunci**

   a) $g(x)\neq 0,\ \forall x\in I\setminus\{x\}$ **şi**

   b) $\lim\limits_{x\to x}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$.

Probleme propuse

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x \;\; -12x$.

a) **Arătaţi că $f'(x) = 3(x-2)(x+2), x\in\mathbb{R}$.**

b) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă x = 2, situat pe graficul funcţiei f .

c) **Arătaţi că $-16 \le f(x) \le 16$, pentru orice $x\in[-2,2]$.**

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=(x-2)e^x$.

a) Arătaţi că $f'(x)=(x-1)e^x$.

b) Determinaţi ecuaţia asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcţiei f .

c) Demonstraţi că $f'(x) \ge -1$, pentru orice număr real x.

3. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-\frac{1}{2}x \;\; -x-1$

a) **Arătaţi că $f'(x)=e^x-x-1$.**

b) **Calculaţi $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{f(x)}$.**

c) **Demonstraţi că $f(2\sqrt{3})<f(3\sqrt{2})$.**

4. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+1}{x}$.

a) **Calculaţi $\lim\limits_{x\to}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$.**

b) **Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcţiei f.**

c) **Demonstraţi că $\frac{2017}{2016}\le f(x)\le 2$, pentru orice $x\in[1, 2016]$.**

5. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x \;\; +3}$

a) **Arătaţi că $f'(x)=-\frac{3(x-1)(x+1)(x \;\; +1)}{(x \;\; +3)}, x\in\mathbb{R}$.**

b) **Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcţiei f.**

c) **Demonstrai că $-\frac{1}{4}\le f(x)\le\frac{1}{4}$, pentru orice număr real x .**

6. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = x \;\; + x \;\; - x + 1$.

a) **Arătaţi că $f'(x) = 3x \;\; + 2x - 1, x\in\mathbb{R}$.**

b) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{xf'(x)}{f(x)}=3$.

c) Determinaţi abscisele punctelor situate pe graficul funcţiei f **în care tangenta la graficul funcţiei** f **este paralelă cu dreapta** $y = 4x + 1$.

7. Se consideră funcţia $f:(3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x\ \ +2x-11}{x-3}$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{(x-1)(x-5)}{(x-3)}$.

b) Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ **la graficul funcţiei** f.

c) Demonstraţi că $f(\pi)>13$.

8. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = x\ \ -8\ln x$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{2(x-2)(x+2)}{x}, x\in(0,+\infty)$.

b) Determinaţi intervalele de monotonie a funcţiei f.

c) Demonstraţi că ecuaţia $f(x) = 0$ **are două soluţii reale distincte.**

9. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = -x\ \ + 3x + 2$.

a) Arătaţi că $f'(x) = 3(1-x)(1+x)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to}\dfrac{f(x)}{x-2}=-9$.

c) Demonstraţi că $f(x)\leq 4$, **pentru orice** $x\in[-1,+\infty)$.

10. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = x\ -3\ln x$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{3(x\ \ -1)}{x}, x\in(0,+\infty)$.

b) Determinaţi ecuaţia asimptotei verticale la graficul funcţiei f.

c) Demonstraţi că $f(x)\geq 1$, **pentru orice** $x\in(0,+\infty)$.

11. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x\ \ - 3x\ \ + 7$.

a) Arătaţi că $f'(x) = 6x(x-1)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Arătaţi că $\lim\limits_{x\to}\dfrac{f(x)-11}{x-2}=12$.

c) Demonstraţi că $f(x) \geq 6$, **pentru orice** $x\in[0,+\infty)$.

12. Se consideră funcţia $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x\ \ -x+1}{x-1}$.

a) Arătaţi că $f'(x)=\dfrac{x(x-2)}{(x-1)}, x\in(1,+\infty)$.

b) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x = 2$, situat pe graficul funcţiei f.

c) Demonstraţi că $f(e) < \frac{7}{2}$.

13. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x \;\; - 3x$.

a) Arătaţi că $f'(x) = 3(x - 1)(x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Arătaţi că $\lim\limits_{x \to} \frac{f(x) + 3x}{x} = 0$.

c) Demonstraţi că $f(x) \geq -2$, pentru orice $x \in [-1, +\infty)$.

14. Se consideră funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, f(x) = e^x + \ln x + 1$.

a) Arătaţi că $f'(x) = e^x + \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$.

b) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x = 1$, situat pe graficul funcţiei f.

c) Demonstraţi că ecuaţia $f(x) = 0$ are soluţie unică în intervalul (0,1).

15. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x \;\; + 3x \;\; + 5$.

a) Arătaţi că $f'(x) = 6x(x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Calculaţi $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f'(x)}{f(x) - 2x}$.

c) Determinaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f .

16. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x - x - 1$.

a) Arătaţi că $\lim\limits_{x \to} \frac{f(x) + f(0)}{x} = 0$.

b) Arătaţi că funcţia f este descrescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$.

c) Demonstraţi că $e^x \geq x + 1$, pentru orice număr real x .

17. Se consideră funcţia $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x + 2}{x - 1}$.

a) Arătaţi că $f'(x) = -\frac{3}{(x - 1)}, x \in (1, +\infty)$.

b) Arătaţi că funcţia f este convexă pe intervalul $(1, +\infty)$.

c) Determinaţi coordonatele punctului situat pe graficul funcţiei f , în care tangenta la graficul funcţiei f este paralelă cu dreapta de ecuaţie $y = -3x$.

18. Se consideră funcţia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \frac{1}{x}$.

a) Arătaţi că $f'(x) = 1 + \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$.

b) Determinaţi ecuaţia asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcţiei f.

c) Demonstraţi că funcţia f este concavă pe intervalul $(0,+\infty)$.

19. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3e^{x} + x$.

a) Arătaţi că $\lim_{x\to} \frac{f(x)-f(0)}{x} = 3$.

b) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcţiei f.

c) Arătaţi ca funcţia f este convexă pe $\mathbb{R}$.

20. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2x \;\; - 6x + 1$.

a) Arătaţi că $f'(x) = 6(x-1)(x+1)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x = 1$, situat pe graficul funcţiei f.

c) Demonstraţi că $f(2012) + f(2014) \leq f(2013) + f(2015)$.