Elemente de analiză matematică, clasa a XII-a

D_1: Fie **I** un interval şi **f**, **F**:$\mathbf{I}\to\mathbf{R}$. Funcţia **F** se numeşte primitivă a lui **f** dacă:

1) **F** este derivabilă;
2) $\mathbf{F}'(\mathbf{x})=\mathbf{f}(\mathbf{x}),\ \forall\, \mathbf{x}\in\mathbf{I}$

- Fie **I** un interval şi funcţia $\mathbf{f}:\mathbf{I}\to\mathbf{R}$ care admite primitive. Dacă $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2:\mathbf{I}\to\mathbf{R}$ sunt primitive ale funcţiei **f**, atunci $\mathbf{F}_1(\mathbf{x})=\mathbf{F}_2(\mathbf{x})+\mathbf{c},\ \forall\, \mathbf{x}\in\mathbf{I},\ \mathbf{c}\in\mathbf{R}$;
- $\int \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx}=\{\mathbf{F}:\mathbf{I}\to\mathbf{R} \mid \mathbf{F}\text{ primitiva a funcţiei } \mathbf{f}\}$ - integrala nedefinită a funcţiei **f**;
- O funcţie continuă pe un interval admite primitive pe acel interval ;
- Derivata oricărei funcţii derivabile pe un interval **I** are proprietatea lui Darboux pe **I** ;
- Daca $\mathbf{f}:\mathbf{I}\to\mathbf{R}$ admite primitive pe intervalul **I**, atunci **f** are proprietatea lui Darboux pe **I** ;
- Fie $\mathbf{f}:\mathbf{I}\to\mathbf{R}$. Dacă imaginea funcţiei pe un subinterval $\mathbf{J}\subset\mathbf{I}$ nu este interval, atunci **f** nu admite primitive pe **I** ;
- O funcţie cu puncte de discontinuitate de speţa I nu admite primitive deoarece nu are proprietatea lui Darboux .

Formula de integrare prin părţi

Fie $\mathbf{f},\mathbf{g}:\mathbf{I}\to R$ funcţii derivabile cu derivatele continue. Aunci funcţiile $\mathbf{f}'\cdot\mathbf{g}$ si $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}'$ admit primitive şi $\int \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{g}'(\mathbf{x})\mathbf{dx}=\mathbf{f}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{g}(\mathbf{x})-\int \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{dx}$.

Teorema de schimbare de variabilă

Fie $\mathbf{I},\mathbf{J}\subset\mathbf{R}$ intervale, $\varphi:\mathbf{I}\to\mathbf{J}$ **si** $\mathbf{f}:\mathbf{J}\to\mathbf{R}$ funcţii cu proprietăţile:

- φ este derivabilă pe **I**
- **f** admite primitiva **F** pe **J**

Atunci functia $(\mathbf{f}\circ\varphi)\cdot\varphi'$ admite primitiva $\mathbf{F}\circ\varphi$ pe **I**.

Daca φ este o functie derivabila pe un interval, atunci:

1) $\int \varphi\ (\mathbf{x})\cdot\varphi'(\mathbf{x})\mathbf{dx}=\frac{\varphi^{\ +1}}{\mathbf{a}+1}+C$

2) $\int \frac{\varphi'(\mathbf{x})}{\varphi(\mathbf{x})}\mathbf{dx}=\ln|\varphi(\mathbf{x})|+C,\quad \varphi\neq 0$

3) $\int \mathbf{a}^{\varphi(\ )}\cdot\varphi'(\mathbf{x})\mathbf{dx}=\frac{\mathbf{a}^{\varphi(\ )}}{\ln\mathbf{a}}+C,\quad a>0,\ a\neq 1$

4) $\int \frac{\varphi'(\mathbf{x})}{\varphi^2(\mathbf{x})-\mathbf{a}^2}\mathbf{dx}=\frac{1}{2\mathbf{a}}\ln\left|\frac{\varphi(\mathbf{x})-\mathbf{a}}{\varphi(\mathbf{x})+\mathbf{a}}\right|+C,\quad \varphi\neq\pm\mathbf{a},\mathbf{a}\neq 0$

5) $\int \frac{\varphi'(\mathbf{x})}{\varphi^2(\mathbf{x})+\mathbf{a}^2}\mathbf{dx}=\frac{1}{\mathbf{a}}\mathbf{arctg}\frac{\varphi(\mathbf{x})}{\mathbf{a}}+C,\ \mathbf{a}\neq 0$

6) $\int \frac{\varphi'(\mathbf{x})}{\sqrt{\varphi^2(\mathbf{x})+\mathbf{a}^2}}\mathbf{dx}=\ln\left(\varphi(\mathbf{x})+\sqrt{\varphi^2(\mathbf{x})+\mathbf{a}^2}\right)+C,\ \mathbf{a}\neq 0$

7) $\int \frac{\varphi'(\mathbf{x})}{\sqrt{\varphi^2(\mathbf{x})-\mathbf{a}^2}}\mathbf{dx}=\ln\left|\varphi(\mathbf{x})+\sqrt{\varphi^2(\mathbf{x})-\mathbf{a}^2}\right|+C,\quad \varphi^2>\mathbf{a}^2$

8) $\int \frac{\varphi'(\mathbf{x})}{\sqrt{\mathbf{a}^2-\varphi^2(\mathbf{x})}}\mathbf{dx}=\arcsin\frac{\varphi(\mathbf{x})}{\mathbf{a}}+C,\ \mathbf{a}>0,-\mathbf{a}<\varphi<\mathbf{a}$

9) $\int \sin\varphi(x)\cdot\varphi'(\mathbf{x})\mathbf{dx}=-\cos\varphi(\mathbf{x})+C$

10) $\int \cos\varphi(\mathbf{x})\cdot\varphi'(\mathbf{x})\mathbf{dx}=\sin\varphi(\mathbf{x})+C$

11) $\int \frac{\varphi'(\mathbf{x})}{\cos^2\varphi(\mathbf{x})}\mathbf{dx}=\mathbf{tg}\varphi(\mathbf{x})+C,\quad \varphi(\mathbf{x})\neq(2\mathbf{k}+1)\frac{\pi}{2},\forall\mathbf{k}\in\mathbf{Z},\forall\mathbf{x}\in\mathbf{I}$

12) $\int \frac{\varphi'(\mathbf{x})}{\sin^2\varphi(\mathbf{x})}\mathbf{dx}=-\mathbf{ctg}\varphi(\mathbf{x})+C,\quad \varphi(\mathbf{x})\neq\mathbf{k}\pi,\forall\mathbf{k}\in\mathbf{Z},\forall\mathbf{x}\in\mathbf{I}$

13) $\int \mathbf{tg}\varphi(\mathbf{x})\cdot\varphi'(\mathbf{x})\mathbf{dx}=-\ln\left|\cos\varphi(\mathbf{x})\right|+C,\quad \varphi(\mathbf{x})\neq(2\mathbf{k}+1)\frac{\pi}{2},\forall\mathbf{k}\in\mathbf{Z},\forall\mathbf{x}\in\mathbf{I}$

14) $\int \mathbf{ctg}\varphi(\mathbf{x})\cdot\varphi'(\mathbf{x})\mathbf{dx}=\ln\left|\sin\varphi(\mathbf{x})\right|+C,\quad \varphi(\mathbf{x})\neq\mathbf{k}\pi,\forall\mathbf{k}\in\mathbf{Z},\forall\mathbf{x}\in\mathbf{I}$

D_2: O funcţie raţională **f**, definita pe un interval **I**, este de forma $\mathbf{f}(\mathbf{x})=\frac{\mathbf{P}(\mathbf{x})}{\mathbf{Q}(\mathbf{x})},\ \forall\mathbf{x}\in\mathbf{I}$, $\mathbf{Q}(\mathbf{x})\neq 0$, unde $\mathbf{P},\mathbf{Q}\in\mathbf{R}[X]$.

D_3: O funcţie raţională se numeşte funcţie raţională simplă dacă are una din formele:

1) $\mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{P}(\mathbf{x}),\quad \mathbf{P}\in\mathbf{R}[X]$
2) $\mathbf{f}(\mathbf{x})=\frac{\mathbf{A}}{(\mathbf{x}-\mathbf{a})},\quad \mathbf{A},\mathbf{a}\in\mathbf{R},\mathbf{n}\in\mathbf{N}^*$
3) $\mathbf{f}(\mathbf{x})=\frac{\mathbf{Ax}+\mathbf{B}}{(\mathbf{x}^2+\mathbf{ax}+\mathbf{b})},\quad \mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbf{R},\mathbf{a}^2-4\mathbf{b}<0,\mathbf{n}\in\mathbf{N}^*$

- Orice funcţie raţională se poate descompune, în mod unic, în suma de funcţii raţionale simple

D_4: Fie $\mathbf{F}:\mathbf{I}\to\mathbf{R}$ o primitiva a functiei continue $\mathbf{f}:\mathbf{I}\to\mathbf{R}$. Se numeste integrala definită a funcţiei **f** de la **a** la **b**, numărul real notat şi definit prin relatia $\int \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx}=\mathbf{F}(\mathbf{b})-\mathbf{F}(\mathbf{a})$ (formula Leibniz-Newton)

$-\int(\lambda\cdot\mathbf{f}(\mathbf{x})+\mu\cdot\mathbf{g}(\mathbf{x}))\mathbf{dx}=\lambda\int\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx}+\mu\int\mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{dx},(\forall)\lambda,\mu\in\mathbf{R}$

$-(\forall)\mathbf{c}\in\mathbf{I},\int\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx}=\int\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx}+\int\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx}$

$-(\exists)\mathbf{c}\in(\mathbf{a},\mathbf{b})\ \mathbf{a.i.}\int\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx}=\mathbf{f}(\mathbf{c})\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a})$

$-$ **Daca** $\mathbf{f}\geq 0$ pe $[a,b]$, **atunci** $\int\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx}\geq 0$

– **Daca** $\mathbf{f} \le \mathbf{g}$ pe $[a,b]$, **atunci** $\int \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx} \le \int \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{dx}$

–**Daca** $\mathbf{m}, \mathbf{M} \in \mathbf{R}$ sunt astfel încât $m \le f(x) \le \mathbf{M}$, $(\forall)\ \mathbf{x} \in [\mathbf{a},\mathbf{b}]$, atunci $\mathbf{m}(\mathbf{b}-\mathbf{a}) \le \int \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx} \le \mathbf{M}(\mathbf{b}-\mathbf{a})$

– $\left|\int \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx}\right| \le \int |\mathbf{f}(\mathbf{x})|\mathbf{dx}$

D : Fie $\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbf{R}$, $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ şi funcţia continuă pozitivă $\mathbf{f} : [\mathbf{a},\mathbf{b}] \to \mathbf{R}_+$.

Multimea $\Gamma = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbf{R}^2 \,/\, \mathbf{a} \le \mathbf{x} \le \mathbf{b}, 0 \le \mathbf{y} \le \mathbf{f}(\mathbf{x})\}$ se numeşte subgraficul funcţiei **f**..

D : Funcţia $\mathbf{f} : [\mathbf{a},\mathbf{b}] \to \mathbf{R}$ se numeşte continuă pe porţiuni dacă are cel mult un număr finit, nenul, de puncte de discontinuitate şi acestea sunt puncte de discontinuitate de speţa întâi.

-Fie $\mathbf{f}, \mathbf{g} : [\mathbf{a},\mathbf{b}] \to \mathbf{R}$ astfel încât $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x})$, $(\forall)\ \mathbf{x} \in (\mathbf{a},\mathbf{b})$ şi **g** este continuă. Atunci **f** este integrabilă pe $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ şi $\int \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx} = \int \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{dx}$.

-O funcţie $\mathbf{f} : [\mathbf{a},\mathbf{b}] \to \mathbf{R}$ continuă pe porţiuni este integrabilă pe $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ şi

$\int \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx} = \sum_{=1} \int_{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx}$, unde $\mathbf{f} : [\mathbf{c}_{-1}, \mathbf{c}] \to \mathbf{R}, \mathbf{i} = \overline{1,\mathbf{p}}$ sunt funcţiile asociate lui **f.**

-Fie $\mathbf{f}, \mathbf{g} : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ derivabile cu derivate continue. Dacă $\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbf{I}$, atunci**:**

$$\int \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}'(\mathbf{x})\mathbf{dx} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x})\Big| - \int \mathbf{f}'(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{x})\mathbf{dx}.$$

-Dacă $\varphi : \mathbf{I} \to \mathbf{I}$ este derivabila, cu derivata continuă şi $\mathbf{f} : \mathbf{I} \to \mathbf{R}$ este continuă, dacă $\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbf{I}$, atunci $\int \mathbf{f}(\varphi(\mathbf{x})) \cdot \varphi'(\mathbf{x})\mathbf{dx} = \int_{\varphi(\ )}^{\varphi(\ )} \mathbf{f}(\mathbf{t})\mathbf{dt}$.

-Fie $\mathbf{f}, \mathbf{g} : [\mathbf{a},\mathbf{b}] \to \mathbf{R}$ continue a.î. $\mathbf{g}(\mathbf{x}) \le \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $(\forall)\ \mathbf{x} \in [\mathbf{a},\mathbf{b}]$ .Dacă

$\Gamma_{,} = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbf{R}^2 \,/\, \mathbf{a} \le \mathbf{x} \le \mathbf{b}, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \le \mathbf{y} \le \mathbf{f}(\mathbf{x})\}$, atunci **aria** $(\Gamma_{,}) = \int (\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{g}(\mathbf{x}))\mathbf{dx}$.

-Fie $\mathbf{f} : [\mathbf{a},\mathbf{b}] \to \mathbf{R}$ continuă. Mulţimea $\mathbf{V} = \left\{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) \in \mathbf{R}^3 \,/\, \sqrt{\mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2} \le |\mathbf{f}(\mathbf{x})|\right\}$ se numeşte corpul de rotaţie în jurul axei **Ox** determinat de funcţia **f. Volumul** acestui corp este $\mathbf{V} = \pi \int \mathbf{f}^2(\mathbf{x})\mathbf{dx}$.

-Fie $\mathbf{f} : [\mathbf{a},\mathbf{b}] \to \mathbf{R}$ o funcţie derivabilă cu derivata continuă. Lungimea graficului funcţiei este $\mathbf{l}(\mathbf{f}) = \int \sqrt{1 + (\mathbf{f}'(\mathbf{x}))^2}\,\mathbf{dx}$.

-Fie $\mathbf{f} : [\mathbf{a},\mathbf{b}] \to \mathbf{R}_+$ continuă. $\phi = \left\{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) \in \mathbf{R}^3 \,/\, \sqrt{\mathbf{y}^2 + \mathbf{z}^2} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{a} \le \mathbf{x} \le \mathbf{b}\right\}$ se numeste **suprafaţa de rotaţie** daterminată de funcţia **f.** Aria acestei suprafeţe este $A(\mathbf{f}) = 2\pi \int \mathbf{f}(\mathbf{x})\sqrt{1 + (\mathbf{f}'(\mathbf{x}))^2}\,\mathbf{dx}$.

Probleme propuse

1. Se consideră funcţia $\mathbf{f}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = 5\mathbf{x}^4 + 3\mathbf{x}^2 + 1$.

a) Arătaţi că $\int_0^1 \left(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - 3\mathbf{x} - 1\right)\mathbf{dx} = 1$.

b) Calculaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei $\mathbf{f}$, axa $\mathbf{Ox}$ şi dreptele de ecuaţii $\mathbf{x} = 1$ şi $\mathbf{x} = 2$.

c) Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei $\mathbf{f}$ este crescătoare pe $\mathbf{R}$.

2. Se consideră funcţia $\mathbf{f}:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \dfrac{2\mathbf{x}^2+1}{\mathbf{x}}$

a) Arătaţi că $\int_1^2 \left(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \dfrac{1}{\mathbf{x}}\right)\mathbf{dx} = 3$.

b) Demonstraţi că funcţia $\mathbf{F}:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 + \ln\mathbf{x} + 2016$ este o primitivă a funcţiei $\mathbf{f}$.

c) Arătaţi că volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei $\mathbf{Ox}$ a graficului funcţiei $\mathbf{g}:[1,2]\to\mathbf{R}$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ este mai mic decât 14π.

3. Pentru fiecare număr natural nenul $\mathbf{n}$, se consideră numărul $\mathbf{I} \ = \int_0^1 \left(1-\mathbf{x}^2\right)\ \mathbf{dx}$.

a) Arătaţi că $\mathbf{I}_1 = \dfrac{2}{3}$.

b) Demonstraţi că $\mathbf{I}_{+1} \le \mathbf{I}$, pentru orice număr natural nenul $\mathbf{n}$.

c) Demonstraţi că $(2\mathbf{n}+3)\mathbf{I}_{-1} = 2(\mathbf{n}+1)\mathbf{I}$, pentru orice număr natural nenul $\mathbf{n}$.

4. Se consideră funcţia $\mathbf{f}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^3 - 3\mathbf{x}^2 + 2$.

a) Calculaţi $\int_0^2 \left(\mathbf{f}(\mathbf{x}) + 3\mathbf{x}^2 - 2\right)\mathbf{dx}$.

b) Arătaţi că $\int_0^1 \left(\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^3 + 3\mathbf{x}^2 + \mathbf{x}\right)\mathbf{dx} = 2\mathbf{e} - 1$.

c) Demonstraţi că $\int_{1-}^{1+} \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx} = 0$,pentru orice număr real $\mathbf{a}$.

5. Se consideră funcţia $\mathbf{f}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{xe} - 2$.

a) Determinaţi primitiva $\mathbf{F}$ a funcţiei $\mathbf{f}$, pentru care $\mathbf{F}(1) = 0$. .

b) Calculaţi $\int_0^1 \mathbf{xf}(\mathbf{x})\mathbf{dx}$.

c) Determinaţi numerele reale $\mathbf{x}$, ştiind că $\int_1 \mathbf{f}(\mathbf{t})\mathbf{dt} = 0$.

6. Se consideră funcţia $\mathbf{f}:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^5 + \mathbf{x}^3 + 2\mathbf{x}$.

a) Arătaţi că $\int_{-1}^1 \left(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}^3 - 2\mathbf{x}\right)\mathbf{dx} = 0$.

b) Arătaţi că $\int_0^2 \mathbf{e}\ \left(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}^5 - \mathbf{x}^3 + 1\right)\mathbf{dx} = 3\mathbf{e}^2 + 1$.

c) Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei **f** este convexă pe **R**.

7. Se consideră funcţia **f** :**R**→**R**, **f** (**x**) = (3**x** +1)**e** .

a) Arătaţi că $\int_0^1 \frac{1}{\mathbf{e}} \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx} = \frac{5}{2}$.

b) Determinaţi numărul real **m** , pentru care funcţia **F**:**R**→**R**, **F** (**x**)=(3**x** + **m**)**e** este o primitivă a funcţiei **f** .

c) Determinaţi numărul real nenul **a** , ştiind că $\int_0 \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx} = 3\mathbf{a}$.

8. Se consideră funcţia **f** : (4,+∞)→**R**, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathbf{x}(\mathbf{x}-4)}$.

a) Arătaţi că $\int_5^{10} (\mathbf{x}-4)\,\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx} = \ln 2$.

b) Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei **Ox** a graficului funcţiei **g :**[5,6]→**R**, **g** (**x**) = **x f** (**x**).

c) Demonstraţi că $\lim\limits_{\to\infty}\left(\mathbf{n}^2\int^{+1} \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx}\right) = 1$.

9. Se consideră funcţia **f** :**R**→**R**, **f** (**x**) = **x** + 2.

a) Arătaţi că $\int_{-1}^1 (\mathbf{f}(\mathbf{x})-2)\mathbf{dx} = 0$.

b) Arătaţi că $\int_0^1 \mathbf{e}\ \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx} = 2\mathbf{e}-1$.

c) Determinaţi numărul real **a** , ştiind că $\int_0 \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx} = \int_0^{6-} (\mathbf{f}(\mathbf{x})-4)\mathbf{dx}$.

10. Se consideră funcăia **f** :**R**→**R**, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{2\mathbf{x}+3}{\mathbf{x}^2+3\mathbf{x}+3}$.

a) Arătaţi că $\int_1^2 (\mathbf{x}^2+3\mathbf{x}+3)\,\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx} = 6$.

b) Arătaţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei **f** , axa **Ox** şi dreptele de ecuaţii **x** = 0 şi **x** = 3 are aria egală cu ln 7.

c) Demonstraţi că $\int_{-1}^0 \mathbf{f}'(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx} = 0$.

11. Se consideră funcţia **f** :**R**→**R**, **f** (**x**) = $\mathbf{x}^2$ + 3**x**.

a) Arătaţi că $\int_{-1}^1 (\mathbf{f}(\mathbf{x})-3\mathbf{x})\mathbf{dx} = 0$.

b) Arătaţi că $\int_0^1 (\mathbf{f}(\mathbf{x})-\mathbf{x}^2)\mathbf{e}\ \mathbf{dx} = 3$.

c) Determinaţi volumul corpului obţinut prin rotaţia în jurul axei **Ox** a graficului funcţiei $\mathbf{g}:[1,2]\to\mathbf{R}, \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \frac{3\,\mathbf{f}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}}$.

12. Se consideră funcţia **f** : (0,+∞)→**R**, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{e}}{\mathbf{x}^2}$.

a) Arătaţi că $\int_1^2 \mathbf{x}^2 \mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx} = \mathbf{e}(\mathbf{e}-1)$.

b) Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei **f** este convexă pe intervalul $[2,+\infty)$.

c) Demonstraţi că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei **f** , axa **Ox** şi dreptele de ecuaţii **x** =1 şi **x** = 2 are aria mai mică sau egală cu **e**(**e** -1).

13. Se consideră funcţia **f** : **R**→**R**, **f** (**x**) = $\mathbf{x}^4 + \mathbf{x} + 1$.

a) Arătaţi că $\int_0^1 \left(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{x} - 1\right)\mathbf{dx} = \frac{1}{5}$.

b) Arătaţi că $\int_1 \left(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}^4 - 1\right)\mathbf{dx} = \frac{\mathbf{e}^4 + 1}{4}$.

c) Determinaţi aria suprafeţei plane delimitate de graficul funcţiei **f**, axa **Ox** şi dreptele de ecuaţii **x** = 0 şi **x** =1.

14. Pentru fiecare număr natural **n**, se consideră numărul $\mathbf{I} \;\; = \int_0^1 \frac{\mathbf{x}^{\;+1}}{\mathbf{x}+3}\mathbf{dx}$.

a) Arătaţi că $\mathbf{I}_0 = 1 + 3\ln\frac{3}{4}$.

b) Demonstraţi că $\mathbf{I}_{\;+1} + 3\mathbf{I} \;\; = \frac{1}{\mathbf{n}+2}$, pentru orice număr natural **n**.

c) Arătaţi că $\lim_{\;\to\infty} \mathbf{I} \;\; = \frac{1}{4}$.

15. Se consideră funcţia **f** :**R**→**R**, **f** (**x**) = $4\mathbf{x}^3 + 3\mathbf{x}^2$.

a) Arătaţi că $\int_1^2 \left(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - 3\mathbf{x}^2\right)\mathbf{dx} = 15$

b) Determinaţi primitiva **F** a funcţiei **f** pentru care **F** (1) = 2015 .

c) Determinaţi numărul natural **n** , **n** >1, ştiind că $\int_1 \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x})}{\mathbf{x}^2}\mathbf{dx} = 9$.

16. Se consideră funcţia **f** :**R**→**R**, **f** (**x**) = $\mathbf{x}^2 - 2\mathbf{x} + 5$.

a) Arătaţi că $\int_0^1 \left(\mathbf{f}(\mathbf{x}) + 2\mathbf{x} - 5\right)\mathbf{dx} = \frac{1}{3}$.

b) Calculaţi $\int_0^2 \frac{\mathbf{f}'(\mathbf{x})}{\mathbf{f}(\mathbf{x})}\mathbf{dx}$.

c) Arătaţi că $\int_{2014}^{2015} \frac{1}{\mathbf{f}(\mathbf{x})}\mathbf{dx} \le \frac{1}{4}$.

17. Se consideră funcţia **f** :**R**→**R**, **f** (**x**) = **xe** .

a) Arătaţi că $\int_1^2 \frac{1}{\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x})\mathbf{dx} = \mathbf{e}(\mathbf{e}-1)$.

b) Determinaţi primitiva **F** a funcţiei **f** pentru care **F** (1) = 0 .

c) Pentru fiecare număr natural nenul **n** se consideră numărul $\mathbf{I} \ = \int_0^1 \mathbf{x} \ \mathbf{f}(\mathbf{x})\,\mathbf{dx}$.
Arătați că $\mathbf{I} \ + (\mathbf{n}+1)\mathbf{I}_{\ -1} = \mathbf{e}$, pentru orice număr natural **n** , $\mathbf{n} \geq 2$.

18. Se consideră funcţia $\mathbf{f}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 + 2$.

a) Arătați că $\int_0^1 \left(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - 2\right)\mathbf{dx} = \frac{1}{3}$.

b) Determinaţi primitiva **F** a funcţiei **f** pentru care **F** (3) = 5.

c) Arătați că suprafaţa delimitată de graficul funcţiei $\mathbf{g}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{e} \ \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x})$, axa **Ox** și dreptele de ecuații $\mathbf{x} = 0$ și $\mathbf{x} = 1$, are aria egală cu 3**e** - 4.

19. Se consideră funcţia $\mathbf{f}: (0,+\infty) \to \mathbf{R}$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \frac{1}{\mathbf{x}}$.

a) Arătați că $\int_1^3 \left(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \frac{1}{\mathbf{x}}\right)\mathbf{dx} = 4$.

b) Arătați că $\int_1^2 \left(\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \frac{1}{\mathbf{x}}\right)\mathbf{e} \ \mathbf{dx} = \mathbf{e}^2$.

c) Determinaţi numărul real **a** , **a** >1, ştiind că suprafaţa plană delimitată de graficul funcţiei **f** , axa **Ox** şi dreptele de ecuaţii $\mathbf{x} = 1$ și $\mathbf{x} = \mathbf{a}$, are aria egală cu 4 + ln **a**.

20. Se consideră funcţia $\mathbf{f}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 - 4$.

a) Arătați că $\int_0^1 \left(\mathbf{f}(\mathbf{x}) + 4\right) = \frac{1}{3}$.

b) Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $\mathbf{g}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,
$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathbf{f}(\mathbf{x}) + 5}$, axa **Ox** și dreptele de ecuații $\mathbf{x} = 0$ și $\mathbf{x} = 1$.

c) Determinaţi numărul real **a** , **a** >1, pentru care $\int_1 \frac{\mathbf{f}(\mathbf{x}) + 4}{\mathbf{x}}\mathbf{dx} = 12$.