Digitally signed by Virgil-Mihail Zaharia
DN: cn=Virgil-Mihail Zaharia
gn=Virgil-Mihail Zaharia c=Romania l=RO
e=zvirgil@gmail.com
Date: 2017-02-19 21:39+02:00

Logaritmi

Definiţie. *Fie* $a\in \mathbb{R}^*_+$, $a\neq 1$ *şi* $b\in\mathbb{R}^*_+$ *două numere reale. Se numeşte* *logaritm al numărului real strict pozitiv* ***b*** *exponentul la care trebuie ridicat numărul* ***a****, numit bază, pentru a obţine numărul* ***b****.*

Logaritmul numărului b în baza a se notează $\log_a b$

Evident $b = a^{\log_a b}$. Pentru $a = 10$ obţinem logaritmi zecimali ($\lg x$), iar pentru $a = e = 2.71828$ (numărul lui Euler) obţinem logaritmi naturali ($\ln x$).

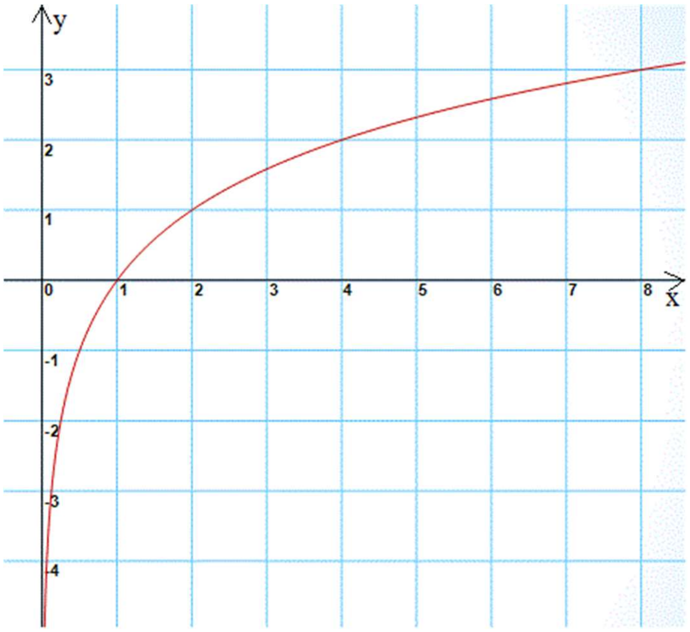
Proprietăţi:

1. Identitatea logaritmica fundamentală $a^{\log_a b} = b$ unde $a > 0$, $a \neq 1$ si $b > 0$.
2. $\log_a b = \log_a c \Leftrightarrow b = c$, $(b,c > 0)$;
3. $\log_a a = 1$;
4. $\log_a 1 = 0$
5. $\log_a a^c = c$; $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$; $\log_a x^{2n} = 2n \log_a |x|$, $x\neq 0$
6. $\log_a \sqrt[m]{b} = \frac{1}{m}\log_a b,\ (b>0, m\in\mathbb{N}, m\geq 2)$;
7. $\log_a b \cdot \log_b a = 1$;
8. Formula de schimbare a bazei logaritmului: $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$
9. $x>0$ şi $y>0 \Rightarrow \log_a xy = \log_a x + \log_a y$;
10. $x>0$ şi $y>0 \Rightarrow \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;
11. $a>1$ şi $x\in(0,1) \Rightarrow \log_a x < 0$; $a>1$ şi $x>1 \Rightarrow \log_a x > 0$;
12. $0<a<1$ şi $x\in(0,1) \Rightarrow \log_a x > 0$; $0<a<1$ şi $x>1 \Rightarrow \log_a x < 0$;
13. $a>1$ şi $0<x<y \Rightarrow \log_a x < \log_a y$;
14. $x>0, y>0, a>0, b>0, a\neq 1, b\neq 1 \Rightarrow \frac{\log_a x}{\log_a y} = \frac{\log_b x}{\log_b y}$;
15. $x>0, a>0, a\neq 1, n\in\mathbf{N} \Rightarrow n\cdot\log_a x = \log_a x^n$;
16. $x\in\mathbb{R}, a>0, a\neq 1 \Rightarrow a^x = e^{x\ln a}$.

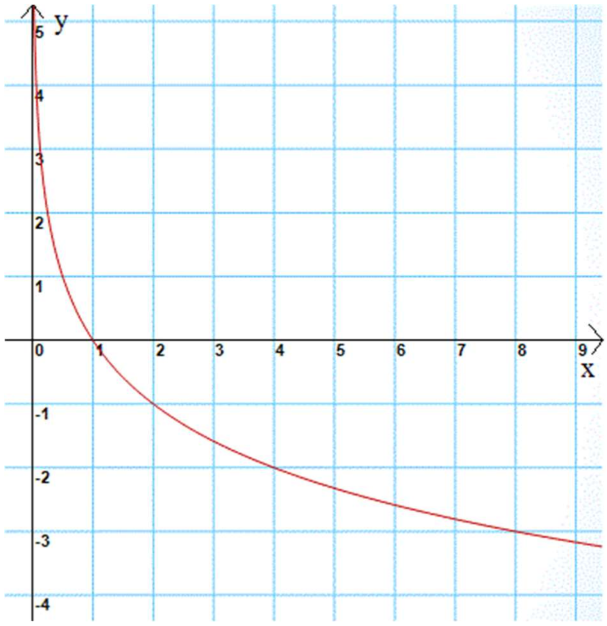
Funcţia logaritmică

Definiţie. Fie a$\in$R, a>0, $a\neq 1$. Funcţia $f:(0,\infty)\to\mathbf{R}, f(x)=\log_a x$ se numeşte funcţia logaritmică de bază ***a***.

Graficul funcţiei logaritmice



$\log_a x,\quad a>1$



$\log_a x,\quad 0<a<1$

Proprietăţile funcţiei logaritmice

1. $f(1)=0,\ \forall x\in(0,+\infty)$;
2. Dacă a>0 funcţia logaritmică este strict crescătoare;
   0<a<1 funcţia logaritmică este strict descrescătoare;
3. Dacă a>0, x<1, atunci $f(x)<0$;
   a>0, x>1, atunci $f(x)>0$;
   0<a<1, x<1, atunci $f(x)>0$;
   0<a<1, x>1, atunci $f(x)<0$;
4. Funcţia logaritmică este bijectivă;
5. Funcţia logaritmică este inversabilă şi inversa ei este funcţia exponenţială.

Ecuaţii şi inecuaţii logaritmice fundamentale

1. $\log_a x = b$, a>0, $a\neq 1$, $b\in\mathbf{R}$. Soluţia: $x = a^b$.
2. $\log_a x > b$, $b\in\mathbf{R}$. Fie S mulţimea soluţiilor. Avem:

a	S
$a>1$	$(a^b, +\infty)$
$0<a<1$	$(0, a^b)$

3. $\log_a x < b$, $b\in\mathbf{R}$. Fie S mulţimea soluţiilor. Avem:

a	S
$a>1$	$(0, a^b)$
$0<a<1$	$(a^b, +\infty)$

4. Ecuatia $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ $(a > 0, a \neq 1)$ este echivalentă cu
$f(x) = g(x)$, cu condiţiile $f(x) > 0$, $g(x) > 0$

5. Ecuatia $\log_{h(x)} f(x) = \log_{h(x)} g(x)$ este echivalenta cu
$f(x) = g(x)$,

Condiţii:

$$\left.\begin{array}{l} h(x) > 0, \\ h(x) \neq 1, \\ f(x) > 0,\ g(x) > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow D \text{ domeniul de rezolvabilitate}$$

Probleme propuse

1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\lg\left(x^2+5\right)=\lg 9$.
2. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5\left(x^2-4\right)=\log_5\left(5x-8\right)$.
3. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3\left(2x+1\right)=\log_3 5$.
4. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3\left(2x-8\right)=\log_3 2$.
5. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2\frac{x-1}{x+1}+\log_2\left(x^2-1\right)=4$.
6. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3 x=\log_x 3$.
7. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_4\left(x^2+9\right)=\log_4 25$.
8. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5\left(2x-1\right)=2$.
9. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3\left(x^2-6x+6\right)=\log_3 1$.
10. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3\left(x^2-8x\right)=\log_3 9$.
11. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2\left(x^2+4\right)=\log_2 8$.
12. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2\left(x^2-4x+4\right)=0$.
13. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3\left(x^2+17\right)=\log_3 81$.
14. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_5\left(2x-1\right)-\log_5 3=0$.
15. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_9\left(x^2+5\right)=1$
16. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2\left(2x-3\right)=\log_2\left(x+1\right)$.
17. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_3\left(x-3\right)=2$
18. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2\left(x^2-2x\right)=3$
19. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2\left(2x+1\right)=\log_2 5$
20. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\log_2 x^3=12-\log_2 x$