Elemente de geometrie analiticã

1. Segmente

1. Distanţa dintre douã puncte $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$: $AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
2. Panta dreptei AB: $m_{AB} = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$
3. Coordonatele (x_0,y_0) ale mijlocului segmentului AB: $x_0 = \dfrac{x_1+x_2}{2}, y_0 = \dfrac{y_1+y_2}{2}$
4. Coordonatele punctului M care împarte segmentul (AB) în raportul k:
   $x = \dfrac{x_1+kx_2}{1+k}, y = \dfrac{y_1+ky_2}{2}$

2. Ecuaţia dreptei

1. Drepte paralele cu axele de coordonate:
   (d):$x = a$ $(d \,||\, Oy)$, (d):$y = a$ $(d \,||\, Ox)$

2. Dreapta determinatã de punctul $M_o(x_o,y_o)$ şi vectorul nul $\overline{a}(u,v):(d): r = \overline{r_o} + t\overline{a}$, $t\in$R, $\overline{r_o}$ -vectorul de poziţie a lui M_o; r-vectorul de poziţie a unui punct M al dreptei d.

$(d):\begin{cases} x = x_o + ut \\ y = y_o + vt \end{cases}$, $t\in$R, ecuaţiile parametrice;

3. Ecuaţia explicitã: $y = mx + n$ ($m\in$R*, $n\in$R, m – panta, n – ordonata la origine);

4. Ecuaţia prin tãieturi: $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}-1=0,(a,b\in R^*)$;

5. Ecuaţia dreptei de pantã m, prin punctul $M_o(x_o,y_o)$: $y - y_o = m(x - x_o)$, $(m\neq 0)$;
6. Ecuaţia dreptei determinatã de punctele $A(x_1,y_2)$, $B(x_2,y_2)$:

$$y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1), \quad \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}, \quad (x_1\neq x_2, y_1\neq y_2) \text{ sau}$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

7. Ecuaţia generalã: $ax + by + c = 0$;
8. Aria triunghiului ABC ($A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$): $A_{ABC} = \dfrac{1}{2}|\Delta|$, unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}$$, dacã $\Delta = 0$ atunci A, B, C sunt colineare

9. Poziţia relativã a dreptelor (d_1) şi (d_2):
   $(d_1): a_1x + b_1y + c_1 = 0$ şi $(d_2): a_2x + b_2y + c_2 = 0$
   $d_1 = d_2$, dacã $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$

$d_1 \,||\, d_2$, dacă $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$;

$d_1 \neq d_2$ şi $d_1 \cap d_2 \neq \emptyset$, dacă $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

10.Distanţa de la punctul $M_o(x_o,y_o)$ la dreapta $(h): ax + by + c = 0$

$$d(M,h) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

11.Unghiul α determinat de dreptele:

$(d_1): y = m_1x + n_1$ şi $(d_2): y = m_2x + n_2$

$$tg\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1m_2}, \quad (m_1m_2 \neq -1)$$

$d_1 \perp d_2$, dacă $m_1m_2 = -1$

$d_1 \parallel d_2$, dacă $m_1 = m_2$

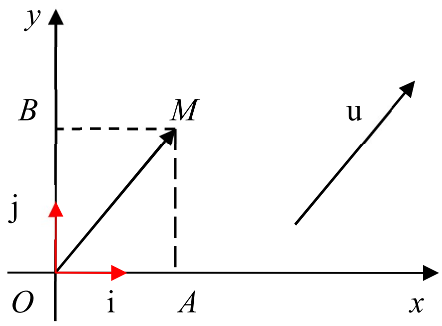
2. Vectori

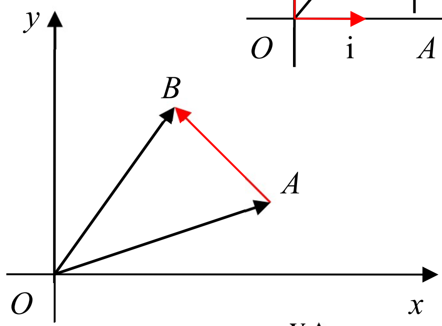
Se numeste versor (notat $\vec{i}$) al dreptei d un vector de lungime 1, care are direcţia dreptei d . Dacă A aparţine lui d îi asociem un număr real , unic x, numit coordonata sa . Atunci $OA=x\cdot\vec{i}$. Dacă $x>0$ atunci A este în sensul pozitiv al axei Ox . Dacă $x<0$ atunci A este în sensul negativ al axei Ox .

Fie Oxy un sistem de axe ortogonale .

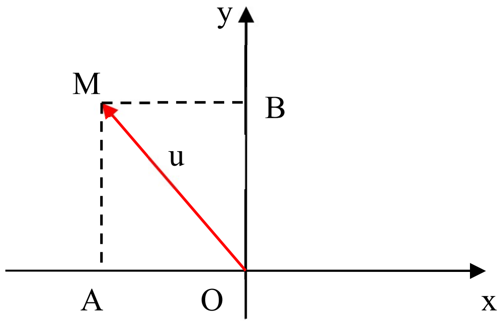
Fie $\vec{i}$ şi $\vec{j}$ versorii axelor Ox, respectiv Oy .

1. Fie $\vec{u}$ un vector în plan. Orice vector $\vec{u}$ poate fi scris în mod unic $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$;





2. $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$;



3. Modulul unui vector

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

4. Suma a doi vectori

$$\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$$

$\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$ $\quad\quad$ $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j}$

5. Condiţia de paralelism

$\vec{u} \parallel \vec{v} \iff \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2}$, $pt.\ x_2, y_2 \neq 0$

6. Condiţia de coliniaritate a 3 puncte

A,B,C – coliniare <=> *AB*||*AC* => $\dfrac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}$

7. Conditia de perpendicularitate

$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 0$

8. Coordonatele mijlocului unui segment

Fie $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ şi $M(x_M,y_M)$ mijlocul segmentului [*AB*]

$x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2}$, $y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2}$

9. Coordonatele centrului de greutate al unui Δ

Fie $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_C,y_C)$ şi $G(x_G,y_G)$ centrul de greutate al triunghiului *ABC*

$x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}$, $y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}$

Probleme propuse

1. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $O(0,0)$, $A(0,3)$ si $B(4,0)$. Calculaţi perimetrul triunghiului AOB .
2. Determinaţi numărul real a, ştiind că vectorii $\vec{u}=(a+1)\vec{j}+(a-1)\vec{i}$ şi $\vec{v}=6\vec{i}+2\vec{j}$ sunt coliniari.
3. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(4,0)$, $B(8,3)$ şi $C(0,3)$. Calculaţi aria triunghiului ABC .
4. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ şi $C(1, 4)$. Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul B şi este paralelă cu mediana din A a triunghiului ABC.
5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(5,0)$ şi $B(2m+1,0)$, unde m este număr real. Determinaţi numărul real m, ştiind că punctul $C(10,0)$ este mijlocul segmentului AB.
6. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,1)$, $B(1,4)$ şi $C(5,1)$. Determinaţi coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.
7. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,2)$ şi $B(3,5)$. Determinaţi coordonatele simetricului punctului A faţă de punctul B.
8. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,a)$, $B(0, -3)$ şi $C(1,1)$, unde a este număr real. Determinaţi numărul real a, ştiind că $AB + BC = AC$.
9. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$ şi $B(5,4)$. Calculaţi distanţa de la punctual A la punctul B.
10. Determinaţi numărul real a , pentru care vectorii $\vec{u}=(a-1)\vec{i}-3\vec{j}$ şi $\vec{v}=2\vec{i}-6\vec{j}$ sunt coliniari.
11. În reperul cartezian xOy se consideră punctul $A(0,3)$. Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul A şi are panta egală cu 1.
12. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,4)$ si $B(6,4)$. Determinaţi coordonatele mijlocului segmentului AB.
13. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,3)$, $B(-2,1)$ si $C(-2,5)$. Determinaţi lungimea vectorului $\overrightarrow{AM}$, ştiind că M este mijlocul segmentului BC.
14. Determinaţi ecuaţia dreptei care trece prin punctul $M(1,-1)$ si este paralelă cu dreapta d de ecuaţie $y = x - 1$.
15. În reperul cartezian xOy se consideră dreapta d de ecuaţie $y = 3x + 4$ şi punctul $A(1,0)$. Determinaţi ecuaţia paralelei duse prin punctul A la dreapta d .
16. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,4)$, $B(-3,2)$ şi $C(5,2)$. Calculaţi lungimea medianei din vârful A al triunghiului ABC.
17. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(-1,1)$, $N(3,1)$ şi $P(3,5)$. Arătaţi că triunghiul MNP este isoscel.
18. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $D(2,4)$, $E(-2,-2)$ şi $F(6, -2)$. Determinaţi coordonatele mijlocului medianei din vârful D al triunghiului DEF.
19. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(2,3)$ şi $N(4,1)$. Determinaţi ecuaţia mediatoarei segmentului MN .
20. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,1)$ şi $B(0,3)$. Determinaţi ecuaţia dreptei AB .