Structuri algebrice

1. Monoid

Fie (M,*), MxM→M, $(x,y)\to x*y$, M-nevidã.

Axiomele monoidului:

M1. $(x*y)*z = x*(y*z)$ $\forall x,y,z\in$ **M (asociativitatea);**

M2. $\exists\ e\in$ **M astfel încât** $x*e = e*x = x$, $\forall x\in$ **M (*e* element neutru);**

dacã M3. $x*y = y*x$, $\forall x,y\in$ **M monidul este comutativ.**

Ex: **1. (N,+), (N,·) sunt monoizi comutativi;**

2. (F(E),o) monoid necomutativ (F(E) este mulţimea funcţiilor f:E→E, E – nevidã, o – compunerea funcţiilor).

2. Grup

Fie (G,*), GxG→G, $(x,y)\to x*y$, G-nevidã.

Axiomele grupului:

G1. $(x*y)*z = x*(y*z)$, $\forall x,y,z\in$ **G(asociativitatea);**

G2. $\exists\ e\in$ **G astfel încât** $x*e = e*x = x$, $\forall x\in$ **G (*e* element neutru);**

G3. $\forall\ x\in$ **G** $\exists\ x'\in$ **G astfel încât** $x'*x = x*x' = e$ **(*x'* simetricul lui *x*);**

dacã G4. $x*y = y*x$, $\forall x,y\in$ **G grupul este comutativ (sau abelian).**

Ex: **1. (Z,+), (Q,+), (R,+), (C,+) – grupuri comutative;**

2. (R ,⊕) – grupul resturilor modulo *n*, comutativ;

3. (M (Z),+) – grupul matricilor pãtrate de ordin *n* cu elemente din Z;

4. (K, o) – grupul lui Klein (al simetriilor faţã de sistemul de coordonate), comutativ;

5. (σ , o) – grupul simetric de grad *n* (al permutãrilor de *n* elemente) nu este comutativ;

Definiţia 2.1. *Fie (G,*) grup, H⊂G, H este <u>subgrup</u> dacã* $\forall\ x,y\in H \Rightarrow x*y\in H$ **şi** $\forall\ x\in H \Rightarrow x'\in H$ ***(x' este simetricul lui x în raport cu operaţia *)*;**

Fie grupurile (G ,⊥), (G ,Δ):

Definiţia 2.2. f**:G →G** *se numeşte **<u>morfism de grupuri</u>** dacã* $f(x\perp y)=f(x)\Delta f(y)$, $\forall x,y\in$ **G .**

Definiţia 2.3. f**:G →G** *se numeşte **<u>izomorfism de grupuri</u>** dacã f este bijectivã şi* $f(x\perp y)=f(x)\Delta f(y)$, $\forall x,y\in$ **G .**

Definiţia 2.4. f**:G →G** *se numeşte **<u>automorfism (endomorfism)</u>** al grupului* G_1*, dacã f este un izomorfism (morfism).*

3. Inel

Fie (A,+,•), AxA→A, $(x,y)\to x+y$ şi AxA→A, $(x,y)\to x\bullet y$, A nevidã;

Definiţia 3.1. (A,+,•) *este <u>inel</u> dacã:*

G. (A,+) este grup abelian;

M. (A,•) este monoid şi

D. • este distributivã faţã de +:

$x\bullet(y+z) = x\bullet \mathbf{y} + y\bullet z$

$(y+z)\bullet x = y\bullet x + y\bullet z$, $\forall x,y,z\in$ **A**

dacã C. $x \bullet y = y \bullet x \; \forall x,y \in$ **A, inelul este comutativ.**

Exemple de inele:

1. **(Z,+,·) – inelul numerelor întregi;**
2. **(Z[*i*],+, ·) – inelul întregilor lui Gauss, Z[*i*] = {**$z = a + bi \mid a,b \in$ **Z}**
3. **(R ,⊕,⊗) – inelul resturilor modulo** n**;**
4. **(M (A),+,·) – inelul matricelor pãtratice (cu elemente din inelul** A**);**
5. **(Z ,+,·) – inelul claselor de resturi modulo** n**.**

Fie inelele (A,⊥,*) şi (A’,Δ,o):

Definiţia 3.1. f**:A→A’** ***se numeşte*** ***<u>izomorfism de inele</u>*** ***dacã f este bijectivă şi*** $f(x \perp y) = f(x) \Delta f(y), f(x * y) = f(x) \circ f(y), \forall x,y \in$ **A.**

Definiţia 3.2. (A,+,•) *este* ***<u>inel fãrã divizori ai lui zero</u>*** ***dacã x≠0, y≠0 implicã x•y≠0.***

Definiţia 3.3. ***Un inel comutativ cu cel puţin douã elemente şi fãrã divizori ai lui zero se numeşte <u>domeniu integritate</u>.***

Definiţia 3.4. ***Dacã (A,+,·) este inel, atunci (A[X],+ ,·) este <u>inelul comutativ al polinoamelor cu coeficienţi în A</u>.***

$f \in$ **A[X],** $f = a \;\; + a \; X + a \; X \;\; + \ldots + a \; X$ **este forma algebricã a unui polinom de nedeterminatã** X **cu coeficienţi în** A**:**

- **dacã** $a \; \neq 0$**, grad** $f = n$ **(a – coeficient dominant);**
- **dacã** $a \; = a \; = \ldots = a \;, f = 0$ **(polinom nul), grad 0 = -∞.**

Proprietãţi: **1. grad (**$f+g$**) ≤ max{grad** f**, grad** g**};**

2. grad $f \cdot g \leq$ **grad** f **+ grad** g**.**

Teoremã. Dacã A **este domeniu de integritate atunci** $A[X]$ **este domeniu de integritate şi grad** $f \cdot g$ **= grad** f **+ grad** g**,** $\forall f,g \in A[X]$**.**

4. Corp

Fie (K,+,•), KxK→K, (x,y**)→**$x+y$ **şi KxK→**k**, (**x,y**)→**$x \bullet$**y, K – nevidã.**

Definiţia 4.1. ***(K,+,•) este <u>corp</u> dacã (K,+,•) este inel, 0≠1 şi*** **∀x∈K, x≠0 ⇒ ∃ x ∈K,** ***astfel încât*** $x \bullet x^{-1} = x^{-1} \bullet x = 1$.

Dacã $x \bullet y = y \bullet x, \; \forall x,y \in$ **K, corpul este comutativ.**

Exemple de corpuri:

1. **(Q,+,·) – corpul numerelor raţionale;**
2. **(R,+, ·) – corpul numerelor reale;**
3. **(C,+, ·) – corpul numerelor complexe;**
4. **(Q(**$\sqrt{d}$**),+,·) – corpul numerelor pãtratice (d∈Z, d – liber de pãtrate);**
5. **(Z ,+, ·) – corpul claselor de resturi modulo** p **(**$p \in$**N*,** p **>1,** p **– numãr prim).**

Definiţia 4.2. ***Fie corpurile (K,⊥,*) şi (K’,Δ,o), f:K→K’ este izomorfism de corpuri dacã f este bijectivã,*** $f(x \perp y) = f(x) \; \Delta \; f(y), f(x * y) = f(x) \circ f(y) \; \forall x,y \in$ **R.**

Caz general

Fie pe R operaţia $x \circ y = axy - abx - aby + b(ab+1)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Se cere:

1. **Să se arate că, $\forall x,y \in \mathbb{R}$ $x \circ y = a(x-b)(y-b)+b$;**
2. **Să se arate că $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t)=a(t-b)$, este funcţie bijectivă care verifică totodată $f(x \circ y)=f(x) \cdot f(y)$, $\forall x,y \in \mathbb{R}$;**
3. **În cazul alegerii $a > 0$ considerând $H = (b;+\infty)$, respectiv în cazul alegerii $a < 0$ considerând H $=(-\infty;b)$, să se arate că, $\forall x,y \in H$, are loc $x \circ y \in H$;**
4. **În cazul alegerii $a > 0$ considerând H $= (b;+\infty)$, respectiv în cazul alegerii $a < 0$ considerând H $=(-\infty;b)$, să se arate că $f:H \to \mathbb{R}_+^*$, $f(t)=a(t-b)$, este izomorfism de la $(H;\circ)$ la $(\mathbb{R}_+^*;\cdot)$;**
5. **Să se arate că, $\forall x,y \in \mathbb{R}$, are loc $x \circ y = y \circ x$;**
6. **Să se arate că $\exists$ $x,y \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ încât $x \circ y \in \mathbb{Z}$;**
7. **Să se arate că $\exists$ $x,y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ încât $x \circ y \in \mathbb{Z}$;**
8. **Să se arate că $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$, are loc $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$;**
9. **Să se arate că $\exists e \in \mathbb{R}$ încât, $\forall x \in \mathbb{R}$, verifică $x \circ e = e \circ x = x$;**
10. **Să se arate că, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{b\}$, $\exists x' \in \mathbb{R} \setminus \{b\}$ încât $x \circ x' = x' \circ x = \dfrac{1}{a} + b$;**
11. **În cazul alegerii $a > 0$, considerând H $= (b;+\infty)$, respectiv în cazul alegerii $a<0$, considerând H$=(-\infty;b)$, să se determine ce fel de structură este $(H, \circ)$;**
12. **Să se rezolve ecuaţia $x \circ \left(\dfrac{1}{a}+b\right) \circ x = a \cdot A \cdot B + C$, $x \in (0,+\infty)$, unde $A=$"an"$-b-c$, $B=$"an"$-b+c$, $C=ac+b$, $\forall c \in \mathbb{Z}$;**
13. **Să se arate că $\exists \theta \in \mathbb{R}$ încât $\forall x \in \mathbb{R}$ verifică $x \circ \theta = \theta \circ x = \theta$;**
14. **Să se determine valoarea expresiei $E=(-\text{"an"}) \circ (-\text{"an"}+1) \circ \ldots \circ (-2) \circ (-1) \circ 0 \circ 1 \circ 2 \circ \ldots \circ (\text{"an"}-1) \circ (\text{"an"})$;**
15. **Să se arate că, $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$, $x \circ y \circ z = a\ (x-b)(y-b)(z-b)+b$;**
16. **Să se rezolve în R ecuaţia $(\text{"an"}x - x + b) \circ (x - \text{"an"}x + b) = b$;**
17. **Să se rezolve în R ecuaţia $(b-|b|+d^x) \circ (\log x) \circ (b-1+C^{x}_{\text{"}\ \text{"}}) = b$, $\forall d \in \mathbb{N}$, $d \geq 2$;**
18. **Să se arate că $\underbrace{A \circ A \circ \ldots \circ A}_{de\, n\, ori} = a^{n-} \cdot (A-b)^n + b$, $\forall n \in \mathbb{N}$, A fiind un număr real liber ales, spre exemplu A = "an";**
19. **Să se determine cel mai mic număr $n \in \mathbb{N}^*$ cu proprietatea $(b+1) \circ (b+2) \circ (b+3) \circ \ldots \circ n \geq$ "an";**
20. **Să se rezolve în R ecuaţia $x \circ x \circ x \circ x \circ x = a \ \cdot A + b$, A fiind un număr real liber ales, spre exemplu A = "an".**

Rezolvare

1. **Se verifică imediat, prin calcul direct:**
   $x \circ y = a(x-b)(y-b)+b = a(xy - bx - by + b2) + b = axy - abx - aby + b(ab+1)$
2. **Justificarea bijectivităţii funcţiei $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t)=a(t-b)$, este imediată, ca funcţie de gradul întâi. Conform cu**

$x\circ y=a(x-b)(y-b)+b \Rightarrow x\circ y-b=a(x-b)(y-b)\,|\cdot a \Rightarrow a(x\circ y-b)=a(x-b)\cdot a(y-b)$
este chiar cerinţa, respectiv $f(x\circ y)=f(x)\cdot f(y)$**.**

3. **Fie** $x\in H \Rightarrow (x-b)\geq 0$ **şi** $y\in H \Rightarrow (y-b)\geq 0$ **şi atunci** $(x-b)(y-b)\geq 0$**, dar cum** a **este constantă nenulă şi de semn prestabilit, apartenenţa** $a(x-b)(y-b)+b=x\circ y\in H$ **este justificată.**
4. **Variaţia funcţiei** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(t)=a(t-b)$**, studiată anterior, arată imediat că restricţia** $f:H\to \mathbb{R}^*_+$ **este bijectivă. Tot din datele anterioare, este evident că** H **este parte stabilă a structurii (R;∘) (item 3) şi că are loc proprietatea de morfism +(item 2), izomorfismul fiind astfel demonstrat.**
5. **Comutativitatea este imediată**
6. **Luând** $x\circ y=a(x-b)(y-b)+b$ **şi alegând** $x-b=\frac{2}{3}$ **şi** $y-b=\frac{3}{2}$**, deoarece** $b\in\mathbb{Z}$**, evident** $x,y\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ **şi** $x\circ y=a+b\in\mathbb{Z}$**.**
7. **Pe aceeaşi idee, alegând** $x-b=\sqrt{2}-1$ **şi** $y-b=\sqrt{2}+1$**, se va obţine** $x,y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ **şi** $x\circ y=a+b\in\mathbb{Z}$**. Se observă că alegerea nu este unică, admiţând chiar o infinitate de posibilităţi.**
8. **Asociativitatea se demonstrează prin calcul**
9. **Din** $x\circ y=a(x-b)(y-b)+b$ **şi** $x\circ e=x$ **conduce la** $a(x-b)(e-b)+b=x$ **din care se obţine** $e=\frac{1}{a}+b$
10. **Dubla egalitate** $x\circ x'=x'\circ x=\frac{1}{a}+b$ **se reduce de fapt la** $x\circ x'=\frac{1}{a}+b$ **care se exprimă în forma** $a(x-b)(x'-b)+b=\frac{1}{a}+b$**, obţinând** $x'=b+\frac{1}{a\ (x-b)}$ **care este în mod evident din** $\mathbb{R}\setminus\{b\}$**, justificând afirmaţia din *item 10*.**
11. **Structura** $(H;\circ)$ **se dovedeşte grup comutativ, verificarea proprietăţilor fiind asigurată de concluzii anterioare.**
12. **Cum** $e=\frac{1}{a}+b$, $x\circ\left(\frac{1}{a}+b\right)\circ x=a\cdot A\cdot B+C$ **devine** $x\circ x=a\cdot A\cdot B+C$**, adică** $a(x-b)+b=a\cdot(\text{"an"}-b-c)\times(\text{"an"}-b+c)+ac+b$**. Observând diferenţa de pătrate, din** $a(x-b)=a\cdot[(\text{"an"}-b)-c]+ac$ **se obţine** $(x-b)=(\text{"an"}-b)$ **şi în final** $x=\text{"an"}$**, în condiţia alegerii evidente** $2b-\text{"an"}<0<\text{"an"}-b$**.**
13. **Din** $x\circ y=a(x-b)(y-b)+b$ **se observă** $q=b$ **cu proprietatea menţionată,** $x\circ\theta=\theta\circ x=\theta$**.**
14. **Cum** $\theta=b$ **se regăseşte printre „factorii” ce compun expresia** E **, răspunsul la este** $E=\theta=b$**.**
15. **Se obţine prin calcul folosind** $x\circ y=a(x-b)(y-b)+b$.
16. **Ecuaţia** $(\text{"an"}x-x+b)\circ(x-\text{"an"}x+b)=b$ **devine** $(\text{"an"}x-x)(x-\text{"an"}x)=0$ **şi răspunsul va fi** $x\in\left\{0;\text{"an"};\frac{1}{\text{"an"}}\right\}$**.**
17. **Ecuaţia devine** $(d^x-|b|)(\log_d x-b)\left(C^x\quad-1\right)=0$ **, deci** $x\in\left\{\log_d|b|;d^b;0;\text{"an"}\right\}$**.**
18. **Izomorfismul conduce imediat la** $x\ \circ x\ \circ\ldots\circ x_n=a^{n-}\cdot\prod_{k=}^{n}(x_k-b)+b$ **şi astfel identitatea** $\underbrace{A\circ A\circ\ldots\circ A}_{de\ n\ ori}=a^{n-}\ (A-b)^n+b$ **este evidentă.**

19. $(b+1)\circ(b+2)\circ(b+3)\circ\ldots\circ n=a^{n\ b}\ \cdot(n-b)!+b$ **şi astfel se determină imediat răspunsul.**

20. $x\circ x\circ x\circ x\circ x=a\ \cdot(x-b)\ +b$ **şi** $a\ \cdot(x-b)\ +b=a\ \cdot A\ +b$ **soluţia** $x=A+b$.

Exemplul (corespunzător alegerii a=1, b=5, c=5 şi d=2)

Fie pe R operaţia $x\circ y=xy-5x-5y+30, \forall x,y\in \mathbb{R}$. **Se cere:**

1) **Să se arate că,** $\forall x,y\in\mathbb{R}$, $x\circ y=(x-5)(y-5)+5$;

2) **Să se arate că** $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(t)=t-5$, **este funcţie bijectivă, care verifică totodată** $f(x\circ y)=f(x)\cdot f(y)$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$.

3) **Considerând** $H=(5;+\infty)$, **să se arate că,** $\forall x,y\in H$, **are loc** $x\circ y\in H$;

4) **Considerând** $H=(5;+\infty)$, **să se arate că** $f:H\rightarrow\mathbb{R}_+^*$, $f(t)=t-5$, **este izomorfism de la** $(H;\circ)$ **la** $(\mathbb{R}\quad;\cdot)$;

5) **Să se arate că,** $\forall x,y\in\mathbb{R}$, **are loc** $x\circ y=y\circ x$;

6) **Să se arate că** $\exists\ x,y\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ **încât** $x\circ y\in\mathbb{Z}$;

7) **Să se arate că** $\exists\ x,y\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ **încât** $x\circ\ y\in\mathbb{Z}$;

8) **Să se arate că,** $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$, **are loc** $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$;

9) **Să se arate că** $\exists e\in\mathbb{R}$ **încât** $\forall x\in\mathbb{R}$ **verifică** $x\circ e=e\circ x=x$;

10) **Să se arate că,** $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{5\}$, $\exists x'\in\mathbb{R}\setminus\{5\}$ **încât** $x\circ x'=x'\circ x=6$;

11) **Considerând** $H=(5;+\infty)$, **să se determine ce fel de structură este** $(H,\circ)$;

12) **Să se rezolve ecuaţia** $x\circ 6\circ x=1999\cdot 2009+30$, $x\in(0,+\infty)$;

13) **Să se arate că** $\exists\theta\in\mathbb{R}$ **încât** $\forall x\in\mathbb{R}$ **verifică** $x\circ\theta=\theta\circ x=\theta$;

14) **Să se determine valoarea expresiei**
$E=(-2009)\circ(-2008)\circ\ldots\circ(-2)\circ(-1)\circ 0\circ 1\circ 2\circ\ldots\circ 2008\circ 2009$;

15) **Să se arate că,** $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$, $x\circ y\circ z=(x-5)(y-5)(z-5)+5$;

16) **Să se rezolve în R ecuaţia** $(2009x\ -x+5)\circ(x\ -2009x+5)=5$;

17) **Să se rezolve în R ecuaţia** $(2^x)\circ(\log\ x)\circ(4+C^x_{2009})=5$;

18) **Să se arate că** $\underbrace{2009\circ 2009\circ\ldots\circ 2009}_{de\qquad ori}=2004\qquad+5$

19) **Să se determine cel mai mic număr** $n\in\mathbb{N}^*$, **cu proprietatea** $6\circ 7\circ 8\circ\ldots\circ n\geq 2009$;

20) **Să se rezolve în R ecuaţia** $x\circ x\circ x\circ x\circ x=2009\ +5$

Rezolvare

1. **Se calculează** $(x-5)(y-5)+5=xy-5x-5y+25+5=xy-5x-5y+30=x\circ y$
2. **Funcţie de gradul I, bijectivă.**
   $f(x\circ y)=f((x-5)(y-5)+5)=(x-5)(y-5)+5-5=(x-5)(y-5)=f(x)\cdot f(y)$.
3. $\left.\begin{array}{l} x\in H\Rightarrow x>5\Rightarrow x-5>0 \\ y\in H\Rightarrow y>5\Rightarrow y-5>0\end{array}\right\}\Rightarrow(x-5)(y-5)>0\Big|+5\Rightarrow(x-5)(y-5)+5>5\quad\Rightarrow$
   $x\circ y>5\Rightarrow x\circ y\in H$
4. **Calculând** $f'(t)=1>0\Rightarrow f$ **este strict crescătoare pe** $(5,\infty)$ **şi deci bijectivă pe** $(5,\infty)$.
   Morfismul este demonstrat la itemul 2.
5. $x\circ y=xy-5x-5y+30=yx-5y-5x+30=y\circ x$

6. Alegem x**-5=**$\frac{2}{3}$ **şi** y**-5=** $\frac{3}{2}$ **obţinem** $x=\frac{2}{3}+5=\frac{17}{3}\in \mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ **şi** $y=\frac{3}{2}+5=\frac{13}{2}\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$ **şi calculăm**

$$\frac{17}{3}\circ\frac{13}{2}=\left(\frac{17}{3}-5\right)\left(\frac{13}{2}-5\right)+5=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2}+5=1+5=6\in\mathbb{Z}.$$

7. Alegem x**-5=** $\sqrt{2}$ **-1 şi** y**-5=** $\sqrt{2}$ **+1** $\Rightarrow$ x**=** $\sqrt{2}$ **+4**$\in$**R\Q şi** y**=** $\sqrt{2}$ **+6**$\in$**R\Q şi calculăm**

$$\left(\sqrt{2}+4\right)\circ\left(\sqrt{2}+6\right)=\left(\sqrt{2}+4-5\right)\cdot\left(\sqrt{2}+6-5\right)+5=$$
$$=\left(\sqrt{2}-1\right)\cdot\left(\sqrt{2}+1\right)+5=2-1+5=6\in\mathbb{Z}.$$

8. Asociativitatea:

$(x\circ y)\circ z=[(x-5)(y-5)+5]\circ z=[(x-5)(y-5)+5-5](z-5)+5=(x-5)(y-5)(z-5)+5$

$x\circ(y\circ z)=x\circ[(y-5)(z-5)+5]=(x-5)[(y-5)(z-5)+5-5]+5=(x-5)(y-5)(z-5)+5$

9. Elemental neutru $x\circ e=x \Rightarrow xe-5x-5e+30=x \Rightarrow xe-5e=6x-30 \Rightarrow e(x-5)=6(x-5) \Rightarrow$ $e=6\in H.$

10. $x\circ x'=6\Rightarrow xx'-5x-5x'+30=6 \Rightarrow xx'-5x'=5x-24 \Rightarrow x'(x-5)=5x-24 \Rightarrow$

$$x'=\frac{5x-24}{x-5}=\frac{5x-25+1}{x-5}=\frac{5(x-5)-1}{x-5}=5-\frac{1}{x-5}\neq 5\Rightarrow x'\in\mathbb{R}\setminus\{5\}$$

11. Din 5) H **este parte stabilă, din 8) rezultă asociativitatea, din 9) elementul neutru, din 9) elementul simetric şi din 5) comutativitatea** $\Rightarrow$ $(H,\circ)$ **formează o structură de grup comutativ.**

12. $x\circ 6\circ x=(x-5)(6-5)(x-5)+5$ **şi obţinem** $(x-5)\ +5=1994\cdot 2005+30 \Rightarrow$
$(x-5)\ =(1999-5)(1999+5)+25 \Rightarrow (x-5)\ =1999\ -25+25 \Rightarrow (x-5)\ =1999\ \Rightarrow$
$x+5=\pm\ 1999 \Rightarrow x\ =1994$ **şi** $x\ =-2004.$

13. Determinăm pe θ **astfel încât** $\theta-5=0 \Rightarrow \theta=5$**. Verificăm:** $x\circ 5=(x+5)(\theta-5)+5=5.$

14. Conform itemului 13) $x\circ 5=5$ **şi în şirul care se compune există numîrul 5, deci** $E=(-2009)\circ(-2008)\circ...\circ(-2)\circ(-1)\circ 0\circ 1\circ 2\circ...\circ 2008\circ 2009=5$

15. Exprimarea de la acest punct s-a demonstrat la itemul 8).

16. $(2009x-x+5)\circ(x-2009x+5)=5 \Rightarrow [(2009x-x+5)-5][(x-2009x+5)-5]+5=5 \Rightarrow (2009x-x)(x-2009x)=0 \Rightarrow x(2009x-1)(x-2009)=0 \Rightarrow x\in\left\{0;\frac{1}{2009};2009\right\}.$

17. Conform punctului 15) $\Rightarrow$

$(2^x)\circ(\log x)\circ(4+C^x{}_{2009})=(2^x-5)(\log x-5)(4+C^x{}_{2009}-5)+5=5 \Rightarrow$

$2^x-5=0 \Rightarrow x\ =\log 5$

$\log x-5=0 \Rightarrow x\ =2$

$C^x\quad -1=0\Rightarrow C^x\quad =1\Rightarrow x\ =0$ **sau** $x\ =2009.$

18. Generalizând punctul 8) se obţine

$$\underbrace{2009\circ 2009\circ...\circ 2009}_{de\qquad ori}=\underbrace{(2009-5)\cdot(2009-5)\cdot...\cdot(2009-5)}_{de\qquad ori}+5=2004\qquad +5$$

19. $6\circ 7\circ 8\circ...\circ n=(5+1-5)\cdot(5+2-5)\cdot(5+3-5)\cdot...\cdot(n-5)+5=1\cdot 2\cdot 3\cdot...\cdot(n-5)+5=(n-5)!+5$ **se obţine** $(n-5)!+5\geq 2009 \Rightarrow (n-5)!\geq 2004$**. Ştim 6!=720 şi 7!=5040, deci** $n=7.$

20. $x\circ x\circ x\circ x\circ x=(x-5)(x-5)(x-5)(x-5)(x-5)+5=(x-5)\ +5 \Rightarrow (x-5)\ +5=2009\ +5 \Rightarrow$
$(x-5)\ =2009\ \Rightarrow x-5=2009 \Rightarrow x=2014.$

Probleme propuse

1. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2$.

a) **Arătați că** $(-1) \circ 1 = -1$.

b) **Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația** $x \circ x = x$.

c) **Determinați perechile** (a,b) **de numerele întregi, știind că** $a \circ b = 8$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = xy + 3x + 3y + 6$.

a) **Arătați că** $0 \circ (-3) = -3$.

b) **Arătați că** $x \circ y = (x+3)(y+3) - 3$, **pentru orice numere reale** x **şi** y.

c) **Arătați că** $(-3) \circ x = -3$, **pentru orice număr real** x.

d) **Verificați dacă** $e = -2$ **este element neutru al legii de compoziție „**$\circ$**".**

e) **Calculați** $(-2016) \circ (-2015) \circ \dots \circ (-3)$.

f) **Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația** $x \circ x \circ x = 5$.

3. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x * y = xy - x - y + 2$.

a) **Arătaţi că** $x * y = (x-1)(y-1) + 1$, **pentru orice numere reale** x **şi** y.

b) **Calculaţi** $0 * 1 * 2 * 3$.

c) **Determinaţi numerele reale** a, **ştiind că** $a * a * 2016 = 2016$.

4. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x \circ y = 6xy - 2x - 2y + 1$.

a) **Calculați** $1 \circ \frac{1}{3}$

b) **Determinaţi elementul neutru al legii de compoziţie „**$\circ$**".**

c) **Calculați** $\frac{1}{1008} \circ \frac{2}{1008} \circ \frac{3}{1008} \circ \dots \circ \frac{2016}{1008}$

5. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziție $x \circ y = xy + x + y$.

a) **Calculaţi** $(-2) \circ 2$.

b) **Arătați că** $x \circ y = (x+1)(y+1) - 1$, **pentru orice numere reale** x **şi** y.

c) **Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația** $x \circ x = -1$.

d) **Verificați dacă legea de compoziţie „**$\circ$**" este asociativă.**

e) **Demonstraţi că numărul** $n \circ n$ **este multiplu de 8, pentru orice număr natural par** n.

f) **Dați un exemplu de două numere iraționale** a **și** b, **pentru care** $a \circ b \in \mathbb{N}$.

6. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = xy - 4x - 4y + 20$.

a) **Arătaţi că** $x * y = (x-4)(y-4) + 4$, **pentru orice numere reale** x **şi** y.

b) **Calculați** $1 * 2 * 3 * * 2016$.

c) **Determinaţi numerele naturale** a, b **şi** c, **ştiind că** $a < b < c$ **și** $a * b * c = 66$.

7. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$.

a) **Arătaţi că** $1 \circ (-2) = -2$.

b) **Demonstrați că** $x \circ y = (x+2)(y+2) - 2$, **pentru orice numere reale** x **și** y.

c) **Determinați numerele reale nenule** x, **pentru care** $x \circ \frac{1}{x} = x$

8. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă

$x * y = -2xy + 10x + 10y - 45$.

a) Arătați că $x * y = -2(x-5)(y-5)+5$**, pentru orice numere reale** x **și** y.

b) Arătați că $1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 * 10 = 5$.

c) Determinați numerele naturale m **și** n**, pentru care** $m * n = 27$.

9. Pe mulţimea numerelor reale se defineste legea de compoziţie dată de

$x \circ y = -xy + x + y$.

a) Calculaţi $1 \circ 2015$.

b) Arătaţi că $x \circ y = -(x-1)(y-1)+1$**, pentru orice numere reale** x **si** y.

c) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3 \circ 5 = 1$.

10. Pe mulţimea numerelor reale se defineste legea de compoziţie $x \circ y = x + y - 2$.

a) Calculați $(-2) \circ 2$.

b) Arătați că legea de compoziţie „$\circ$” este asociativă.

c) Verificaţi dacă $e = 2$ **este element neutru al legii de compoziţie „$\circ$”.**

d) Determinaţi numărul real x**, ştiind că** $(x+1) \circ x = 3$.

e) Rezolvaţi în mulțimea numerelor reale ecuaţia $9^x \circ 3^x = 0$

f) Arătaţi că $x \circ \frac{1}{x} \geq 0$ **pentru orice număr real nenul** x.

11. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă

$x * y = xy - 7x - 7y + 56$.

a) Arătați că $(-7) * 7 = 7$.

b) Arătați că $x * y = (x-7)(y-7)+7$**, pentru orice numere reale** x **şi** y.

c) Calculați $1 * 2 * 3 * \cdots * 2015$.

12. Pe mulţimea numerelor reale se defineste legea de compoziţie asociativă

$x \circ y = xy - 3(x+y) + 12$.

a) Arătaţi că $x \circ 3 = 3 \circ x = 3$**, pentru orice număr real** x.

b) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x \circ x = x$.

c) Calculaţi $1 \circ 2 \circ ... \circ 2014$.

13. Pe mulţimea numerelor reale se defineste legea de compoziţie dată de $x \circ y = x + y - 1$.

a) Calculaţi $2 \circ 3$.

b) Verificați dacă legea de compoziție „$\circ$” este comutativă.

c) Arătaţi că legea de compoziţie „$\circ$” este asociativă.

d) Determinaţi numerele reale x **pentru care** $x \circ x = 11$

e) Arătaţi că $x \circ (x + 2014) = (x+1012) \circ (x+1012)$**, pentru orice număr real** x.

f) Determinaţi numărul real nenul x **pentru care** $x \circ \frac{1}{x} = 1$

14. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = 2(x + y - 1) - xy$.

a) Arătaţi că $1 * 2 = 2$.

b) Arătaţi că $x * 2 = 2 * x = 2$ **pentru orice număr real** x.

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x * x = x$.

15. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 2xy - 3x - 3y + 6$.

a) Calculați $1 \circ 2$.

b) Arătaţi că $x \circ y = 2\left(x - \frac{3}{2}\right)\left(y - \frac{3}{2}\right) + \frac{3}{2}$ pentru orice numere reale x şi y.

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x = 2$.

16. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = xy - 5x - 5y + 30$.

a) Arătați că $1*5 = 5$.

b) Arătați că $x * y = (x - 5)(y - 5) + 5$ pentru orice numere reale x şi y.

c) Rezolvaţi în mulțimea numerelor reale ecuaţia $x * x = x$.

17. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă

$x * y = 3x + 3y - xy - 6$.

a) Calculaţi $1*3$.

b) Arătaţi că $x * y = 3 - (x - 3)(y - 3)$ pentru orice numere reale x şi y.

c) Determinaţi numerele reale x pentru care $\underbrace{x*x*...*x}_{x\,de\quad ori} = x$.

18. Pe mulţimea numerelor întregi se definesc legile de compoziţie $x * y = x + y - 3$ şi

$x \circ y = (x - 3)(y - 3) + 3$.

a) Să se rezolve în mulţimea numerelor întregi ecuaţia $x * x = x \circ x$.

b) Să se determine numărul întreg a care are proprietatea că $x \circ a = 3$, oricare ar fi numărul întreg x.

c) Să se rezolve sistemul de ecuaţii $\begin{cases} x * (y + 1) = 4 \\ (x - y) \circ 1 = 5 \end{cases}$, unde $x, y \in \mathbb{Z}$.

19. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă

$x \circ y = 2xy - 6x - 6y + 21$.

a) Arătaţi că $x \circ y = 2(x-3)(y-3) + 3$, pentru orice numere reale x şi y.

b) Arătaţi că $1 \circ 2 \circ 3 \circ 4 = 3$.

c) Determinaţi numerele reale x, pentru care $x \circ x \circ x = x$.

20. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = x + y - 5$.

a. Arătaţi că $(-2) * 7 = 0$.

b. Arătaţi că legea de compoziţie „*” este asociativă.

c. Arătaţi că $(1* 2)*(8*9) = (1*9)*(2 *8)$.

d. Determinaţi numărul real x, pentru care $(x * x) * x = x$.

e. Determinaţi numărul real x, pentru care $9^x * 3^x = 7$.

f. Demonstraţi că $x * \frac{1}{x} \geq -3$, pentru orice număr real nenul x.