

## Progresii aritmetice și progresii geometrice

Probleme selectate din variantele propuse  
la examenul de bacalaureat 2011-2016

### Progresii aritmetice

Definiția. **Se numește progresie aritmetică un șir de numere  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  în care fiecare termen, începând cu  $a_2$ , se obține din cel precedent prin adăugarea unui număr constant numit rația progresiei.** Se notează  $\div a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$  sau  $(a_n)_{n \geq 1}$ .

Dacă  $a_1$  este primul termen,  $a_n$  cel de-al  $n$ -lea termen (termenul general),  $r$  rația,  $n$  numărul termenilor și  $S_n$  suma celor  $n$  termeni, atunci avem:

$$a_n = a_{n-1} + r, n \geq 2 \text{ (prin definiție)}$$

$$a_n = a_1 + (n - 1)r, n \geq 2 \text{ (prin definiție)}$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}, S_n = \frac{2a_1 + (n - 1)r}{2} \cdot n$$

**Termenii echidistanți de extremi.** Într-o progresie aritmetică *suma termenilor echidistanți de extremi este egală cu suma termenilor extremi*:  $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n$ .

Observație. Dacă numărul termenilor este impar ( $n=2m+1$ ), atunci există un termen în mijloc,  $a_{m+1}$ , astfel încât  $2a_{m+1} = a_1 + a_{2m+1}$ .

Condiția necesară și suficientă pentru ca trei termeni  $a, b, c$ , în această ordine, să formeze o progresie aritmetică, este să avem  $2b = a + c$ .

### Progresii geometrice

Definiția. **Se numește progresie geometrică un șir de numere  $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$  în care fiecare termen, începând cu  $b_2$ , se obține din cel precedent prin înmulțirea acestuia cu un același număr  $q$  ( $q \neq 0$ ) numit rație.** Se notează  $\div \div b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$ , sau  $(b_n)_{n \geq 1}$ .

Dacă  $b_1$  este primul termen,  $b_n$  cel de-al  $n$ -lea termen (termenul general),  $q$  rația,  $n$  numărul termenilor și  $S_n$  suma celor  $n$  termeni, atunci avem:

$$b_n = qb_{n-1}, n \geq 2 \text{ (prin definiție)}$$

$$b_n = b_1 q^{n-1}, n \geq 2 \text{ (} b_n \text{ în funcție de } b_1, q \text{ și } n)$$

$$S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n, S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, q \neq 1.$$

**Termeni echidistanți de extremi.** Într-o progresie geometrică, *produsul a doi termeni echidistanți de extremi este egal cu produsul termenilor extremi*:  $b_p b_{n-p+1} = b_1 b_n$ .

Observație. Dacă numărul termenilor este impar ( $n=2m+1$ ) atunci există un termen la mijloc,  $b_{m+1}$ , astfel încât  $b_{m+1}^2 = b_1 b_{2m+1}$ .

Condiția necesară și suficientă ca trei numere  $a, b, c$ , în această ordine, să formeze o progresie geometrică este să avem  $b^2 = ac$ .

## Probleme propuse

1. Se consideră o progresie aritmetică  $(a_n)_{n \geq 1}$ , în care  $a_2=5$  și  $a_4=11$ . Calculați  $a_6$ .
2. Calculați rația progresiei geometrice  $(b_n)_{n \geq 1}$ , cu termeni pozitivi, dacă  $b_1+b_2=6$  și  $b_3+b_4=24$ .
3. Determinați  $x \in \mathbb{R}$  pentru care numerele  $x-1$ ,  $x+1$  și  $3x-1$  sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
4. Într-o progresie aritmetică  $(a_n)_{n \geq 1}$  se cunosc  $a_2=6$  și  $a_3=5$ . Calculați  $a_6$ .
5. Într-o progresie aritmetică  $(a_n)_{n \geq 1}$  se cunosc  $a_1=5$  și  $r=2$ . Calculați suma primilor 5 termeni ai progresiei.
6. Într-o progresie aritmetică  $(a_n)_{n \geq 1}$  se cunosc  $a_4=7$  și  $a_9=22$ . Calculați  $a_{14}$ .
7. Se consideră progresia aritmetică  $(a_n)_{n \geq 1}$  cu rația  $r = -2$  și  $a_1=19$ . Calculați  $a_7$ .
8. Calculați produsul primilor trei termeni ai progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_1=2$  și  $a_2=1$ .
9. Determinați numărul real  $x$  pentru care numerele 1,  $2x+2$  și 7 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
10. Determinați rația progresiei geometrice  $(b_n)_{n \geq 1}$  cu termeni reali, știind că  $b_1=1$  și  $b_4=27$ .
11. Calculați suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , dacă  $a_1=2$  și  $a_3=8$ .
12. Determinați rația progresiei geometrice  $(b_n)_{n \geq 1}$  cu termeni reali, știind că  $b_2=1$  și  $b_5=8$ .
13. Determinați rația progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_1=3$  și  $a_8=38$ .
14. Determinați numărul real  $x$  știind că numerele 4, 36 și  $x$  sunt în progresie geometrică.
15. Calculați suma primilor trei termeni ai unei progresii aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_2=4$ .
16. Calculați suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$  știind că  $a_1=6$  și  $a_2=12$ .
17. Determinați numărul real  $x$  pentru care numerele 2,  $x+2$  și 10 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
18. Determinați numărul real  $x$  știind că numerele 2, 4 și  $x+5$  sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
19. Calculați rația progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_3=6$  și  $a_4=8$ .
20. Calculați suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_1=3$  și rația  $r=2$ .
21. Determinați numărul real  $x$  pentru care numerele 5,  $2x+3$ ,  $2x+7$  sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
22. Calculați  $a_{2015}$ , știind că  $(a_n)_{n \geq 1}$  este progresie aritmetică cu  $a_1=2015$  și  $r = -1$ .
23. Calculați suma primilor trei termeni ai unei progresii aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_1=1$  și  $a_3=5$ .
24. Determinați al treilea termen al progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_1=2$  și  $a_2=5$ .
25. Determinați al doilea termen al progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_1=1$  și rația  $r=2$ .
26. Calculați rația progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_1=1$  și  $a_2=2015$ .
27. Determinați numărul real  $x$ , știind că numerele 7,  $3x$  și  $x^2 + 2$  sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

28. Determinați primul termen al progresiei geometrice  $(b_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $b_5=48$  și  $b_8=384$ .
29. Determinați numărul real  $a$ , știind că numerele 24, 1020 și  $a$  sunt, în această ordine, termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
30. Determinați al patrulea termen al progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_1=1$  și  $a_2=4$ .
31. Determinați rația progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $2a_{10}=a_5+a_6+36$ .
32. Determinați al treilea termen al progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_1=2016$  și rația  $r=2$ .
33. Determinați al doilea termen al progresiei geometrice  $(b_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $b_1=4$  și rația  $q=2$ .
34. Calculați rația progresiei geometrice  $(b_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $b_3=5$  și  $b_4=10$ .