Simulare, Bacalaureat, 28 ianuarie 2022
Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	Deoarece $2-3i=\overline{2+3i}$, $A=z(2+3i)+\overline{z}\cdot\left(\overline{2+3i}\right)=z(2+3i)+\overline{z(2+3i)}\in\mathbb{R}$, deoarece este suma dintre un număr complex și conjugatul său.	**3p** **2p**
2.	$f(a)=a^2 \Leftrightarrow 4a-4=a^2 \Leftrightarrow a^2-4a+4=0;$ $a=2.$	**3p** **2p**
3.	$\lg(1-x)-\lg(7-x)=\lg\dfrac{1-x}{7-x}=-1\Rightarrow\dfrac{1-x}{7-x}=\dfrac{1}{10},$ $x=\dfrac{1}{3}$, care convine.	**3p** **2p**
4.	Numărul de submulțimi ale lui M, cu cel puțin trei elemente este $C_5^3+C_5^4+C_5^5=$ =10+5+1=16	**3p** **2p**
5.	Panta dreptei AH este $m_{AH}=\dfrac{1}{3}$ H ortocentrul triunghiului ABC, deci $AH\perp BC$. $\Rightarrow m_{AH}\cdot m_{BC}=-1$, de unde obținem $m_{BC}=-3$.	**2p** **3p**
6.	$\cos(\pi-x)=-\cos x,\ \sin(\pi-x)=\sin x$ $-\sin x\cos x-\sin x\cos x=-1$ $2\sin x\cos x=1\Rightarrow\sin 2x=1$, și cum $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ obținem $x=\dfrac{\pi}{4}$.	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. a)	$A(1,1)=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(A(1,1)\right)=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=$ $=1\cdot 0-(-1)\cdot 1=1$	**2p** **3p**
b)	$A+B=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ -b_1 & a_1-b_1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_2 & b_2\\ -b_2 & a_2-b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+a_2 & b_1+b_2\\ -(b_1+b_2) & a_1+a_2-(b_1+b_2)\end{pmatrix}=$ $=A(a_1+a_2,b_1+b_2)\in M, a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
c)	$A(0,b)=\begin{pmatrix}0 & b\\ -b & -b\end{pmatrix}$ $I_2-A(0,b)=\begin{pmatrix}1 & -b\\ b & 1+b\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(I_2-A(0,b)\right)=b^2+b+1$ $b^2+b+1=\left(b+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0\Rightarrow \det\left(I_2-A(0,b)\right)\neq 0$ pentru orice b real.	**1p** **2p** **2p**
2. a)	$x\circ y=4xy-4x-4y+4+1=4x(y-1)-4(y-1)+1=$ $=4(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.	**3p** **2p**
b)	$N=4(2021-1)(2022-1)+1=4\cdot 2020\cdot 2021+1=$ $=4\cdot 2020(2020+1)+1=4\cdot 2020^2+4\cdot 2020+1=(2\cdot 2020+1)^2=4041^2$	**2p** **3p**
c)	$a\circ b=13\Leftrightarrow 4(a-1)(b-1)+1=13\Leftrightarrow (a-1)(b-1)=3$ Cum a și b sunt numere naturale, obținem $a=2,b=4$ sau $a=4,b=2$.	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. a)	$f'(x)=x'-e(\ln x)'=1-e\cdot\frac{1}{x}=$ $=\frac{x-e}{x}, x\in(0,+\infty)$	**3p** **2p**
b)	Tangenta la graficul funcției în punctul $(a, f(a))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=x$ $\Leftrightarrow$ $f'(a)=1$ $\frac{a-e}{a}=1\Leftrightarrow a-e=a\Leftrightarrow e=0$, imposibil, deci graficul funcției f nu admite în niciun punct o tangentă paralelă cu dreapta de ecuație $y=x$	**2p** **3p**
c)	$f'(x)=0$ pentru $x=e$. $f'(x)<0$ pentru orice $x\in(0,e)\Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0,e)$ și $f'(x)>0$, pentru orice $x\in(e,+\infty)\Rightarrow f$ strict	**2p**

	crescătoare pe $(e,+\infty)$ $e^x - x^e = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$ și , cum $f(e) = 0$, obținem că ecuația $e^x - x^e = 0$ are exact o soluție în $(0,+\infty)$.	3p
2. a)	F derivabilă pe $(0,+\infty)$, $F'(x) = e^{x'} + x' - \ln x' = e^x + 1 - \frac{1}{x} =$ $= e^x + \frac{x-1}{x} = f(x)$, oricare ar fi x real, deci F este o primitivă pentru funcția f.	3p 2p
b)	$\int x(F(x) - x + \ln x)dx = \int x(e^x + x - \ln x - x + \ln x)dx = \int xe^x dx =$ $= \int xe^x dx = (x-1)e^x + c$, unde $c \in \mathbb{R}$.	2p 3p
c)	$G(x) = e^x + x - \ln x + k$, unde $k \in \mathbb{R}$, o primitivă a funcției f. $G(1) = e + 1 + k = e + 2 \Rightarrow k = 1$, deci primitiva cerută G este $G(x) = e^x + x - \ln x + 1$	2p 3p