Examenul național de bacalaureat 2022

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

THEMA I (30 Punkte)

5p **1.** Zeige, dass $8-6\sqrt{6}+6\left(\sqrt{6}-1\right)=2$.

5p **2.** Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+m$, wo m eine reelle Zahl ist. Bestimme die reelle Zahl m so, dass $(f\circ f)(0)=4$.

5p **3.** Löse in der Menge der reelle Zahlen die Gleichung $3\cdot 2^{2x}+4^x=4$.

5p **4.** Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine gewählte natürliche zweistellige Zahl die Bedingung erfüllt, dass die Zehnerziffer Teiler von 6 ist.

5p **5.** In dem kartesischen Koordinatensystem xOy sind die Gerade d mit der Gleichung $y=3x-2$ und der Punkt $A(a,a)$ gegeben, wo a eine reelle Zahl ist. Bestimme die reelle Zahl a, wenn der Punkt A zu der Geraden d gehört.

5p **6.** Gegeben ist das gleichschenklige Dreieck ABC, mit $AB=10$ und $\cos A=0$. Zeige, dass der Flächeninhalt des Dreiecks ABC gleich 50 ist.

THEMA II (30 Punkte)

1. . Gegeben ist die Matrix $A(x)=\begin{pmatrix}1 & -x & x^2\\ 0 & 1 & -2x\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, wo x eine reelle Zahl ist.

5p **a)** Zeige, dass $\det\left(A(1)\right)=1$.

5p **b)** Zeige, dass $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, für alle reellen Zahlen x und y.

5p **c)** Bestimme die natürliche Zahl n so, dass $A(n)\cdot A(n+1)\cdot A(n+2)\cdot A(n+3)=A\left(2n^2\right)$.

2. Auf der Menge $M=[0,+\infty)$ definiert man die Verknüpfung $x*y=\dfrac{2x}{y+2}+\dfrac{2y}{x+2}$.

5p **a)** Zeige, dass $1*0=1$.

5p **b)** Zeige, dass $e=0$ das neutrale Element der Verknüpfung „$*$” ist.

5p **c)** Bestimme $x\in M$, x verschieden von Null so, dass $x*\dfrac{4}{x}=x$.

THEMA III (30 Punkte)

1. Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2+\dfrac{x}{e^x-x}$.

5p **a)** Zeige, dass $f'(x)=\dfrac{e^x(1-x)}{\left(e^x-x\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Bestimme die Monotonieintervalle der Funktion f.

5p **c)** Beweise, dass für jedes $m\in(1,2]$, die Gleichung $f(x)=m$ eine einzige Lösung hat.

2. Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3-x+\sqrt{x^2+9}$.

5p **a)** Zeige, dass $\int_1^5\left(f(x)-\sqrt{x^2+9}\right)dx=0$.

5p **b)** Zeige, dass $\int_0^4\frac{x}{f(x)+x-3}dx=2$.

5p **c)** Gegeben ist die Zahl $I_n=\int_0^1\frac{x^n}{f(x)}dx$ für jede natürliche, von Null verschiedene Zahl n. Beweise, dass $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$.