

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

I. THEMA

(30 Puncte)

- 5p 1. Zeige, dass $5(1+2i) - 2i(5-i) = 3$, wo $i^2 = -1$.
- 5p 2. Gegeben ist die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Bestimme die reelle Zahl a so, dass $f(a) = 1 + a^2$.
- 5p 3. Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $\log_3(2x^2 + 1) = 2$.
- 5p 4. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine gewählte natürliche zweistellige Zahl die Bedingung erfüllt, dass die Ziffern ungerade und verschieden sind.
- 5p 5. Gegeben sind die Punkte $A(2,0)$, $B(1,6)$ und $C(4,2)$ in dem kartesischen Koordinatensystem xOy . Bestimme die Koordinaten des Punktes D , wenn $\overline{AB} = \overline{DC}$.
- 5p 6. Gegeben ist das Dreieck ABC , rechtwinklig in A so, dass $BC = 10$ und $\sin B = 2 \sin C$. Zeige, dass die Länge der Seite AB gleich $2\sqrt{5}$ ist.

II. THEMA

(30 Puncte)

1. Gegeben sind die Matrizen $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $A(x) = \begin{pmatrix} x+1 & -x & 0 \\ x & 1-x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, wo x eine reelle Zahl ist.
- 5p a) Zeige, dass $\det(A(1)) = 1$.
- 5p b) Zeige, dass $(A(x) - I_3)(A(x) - I_3) = O_3$, für jede reelle Zahl x .
- 5p c) Bestimme die reellen Zahlen x so, dass $A(x) \cdot A(x) = xA(x) - (x-1)I_3$.
2. Auf der Menge der reellen Zahlen definiert man die Verknüpfung $x * y = (x+y)^2 - 2(x-y) - 3$.
- 5p a) Zeige, dass $0 * 2 = 5$.
- 5p b) Bestimme die reellen Zahlen x so, dass $x * (x+1) = 8$.
- 5p c) Bestimme die Paare (m, n) von natürlichen Zahlen so, dass $m * n = 2mn$.

III. THEMA

(30 Puncte)

1. Gegeben ist die Funktion $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 5x + 10)\sqrt{x}$.
- 5p a) Zeige, dass $f'(x) = \frac{5(x^2 - 3x + 2)}{2\sqrt{x}}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Bestimme die Monotonieintervalle der Funktion f .
- 5p c) Zeige, dass $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x)}{x^2 \sqrt{x}} \right)^{\frac{x}{5}} = \frac{1}{e}$.

2. Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + e^x + \frac{1}{e^x + 1}$.

5p a) Zeige, dass $\int_0^2 \left(f(x) - \frac{1}{e^x + 1} \right) dx = e^2 + 1$.

5p b) Zeige, dass $\int_{-1}^1 e^x (f(x) - x - e^x) dx = 1$.

5p c) Bestimme die reelle Zahl m so, dass $\int_0^1 x(f(x) + f(-x)) dx = \frac{m}{2} - \frac{2}{e}$.