**Examenul național de bacalaureat 2022**
**Proba E. c)**
**Matematică *M_mate-info***

**Varianta 7**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

## I. THEMA (30 Punkte)

**5p** **1.** Zeige, dass $2i(3-i)-6i=2$, wobei $i^2=-1$.

**5p** **2.** Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-mx$, wobei $m$ eine reelle Zahl ist. Bestimme die reelle Zahl $m$ so, dass $f(-1)=f(1)$.

**5p** **3.** Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $27^{x-1}=9^x$.

**5p** **4.** Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass eine gewählte natürliche zweistellige Zahl die Bedingung erfüllt, dass ihre Ziffern kleiner oder gleich $3$ sind.

**5p** **5.** Gegeben sind die Punkte $A(3,2)$ und $B(1,-1)$ in dem kartesischen Koordinatensystem $xOy$. Bestimme die Koordinaten des Punktes $C$ so, dass $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{BC}$.

**5p** **6.** Gegeben ist der Ausdruck $E(x)=\sin 2x-2\operatorname{tg}x\cdot\sin\dfrac{2x}{3}$, wobei $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Zeige, dass $E\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=0$.

## II. THEMA (30 Punkte)

**1.** Gegeben sind die Matrizen $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ und $A(x)=\begin{pmatrix}x&1-x&1\\1-x&x&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, wobei $x$ eine reelle Zahl ist.

**5p** **a)** Zeige, dass $\det(A(0))=2$.

**5p** **b)** Zeige, dass $A(1)\cdot A(x)-A(x-1)=2I_3$, für jede reelle Zahl $x$.

**5p** **c)** Bestimme die reelle Zahl $x$ so, dass $A(1)\cdot A(1)\cdot A(x)=3A(1)+2I_3$.

**2.** Auf der Menge $M=[0,+\infty)$ definiert man die Verknüpfung $x*y=\dfrac{xy(x+y)}{xy+1}$.

**5p** **a)** Zeige, dass $1*3=3$.

**5p** **b)** Zeige, dass $e=1$ das neutrale Element der Verknüpfung „*” ist.

**5p** **c)** Bestimme die Paare von natürlichen, von Null verschiedene Zahlen $(m,n)$ mit $m\le n$ so, dass $\dfrac{1}{m}*\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{16}\cdot(m*n)$.

## III. THEMA (30 Punkte)

**1.** Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{e^x}$.

**5p** **a)** Zeige, dass $f'(x)=\dfrac{(x-1)(4-x)}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Zeige, dass die $Ox$ -Achse horizontale Asymptote gegen $+\infty$ an das Schaubild der Funktion $f$ ist.

**5p** **c)** Beweise, dass die Gleichung $f(x)=n$ eine einzige Lösung hat, für jede natürliche, von Null verschiedene Zahl $n$.

**2.** Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x\sqrt{x^2+4}$.

**5p** **a)** Zeige, dass $\int_0^2 \frac{f(x)}{\sqrt{x^2+4}}dx=2$.

**5p** **b)** Zeige, dass $\int_0^{\sqrt{5}} f(x)dx=\frac{19}{3}$.

**5p** **c)** Gegeben ist die Zahl $I_n=\int_1^2 \frac{x^n}{f^2(x)}dx$ für jede natürliche Zahl $n$, $n\geq 2$. Bestimme die natürliche Zahl $n$, $n\geq 2$ so, dass $I_{n+2}+4I_n=\frac{3}{n-1}$.