

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

СУБЈЕКАТ I

(30 бодова)

- 56 1. Докажите да $2i(3-i) - 6i = 2$, где $i^2 = -1$.
- 56 2. Сматра се функција $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - mx$, где m реалан број. Одредите реални број m тако да $f(-1) = f(1)$.
- 56 3. Решите у скупу реалних бројева једначину $27^{x-1} = 9^x$.
- 56 4. Одредите вероватноћу да, бирајући један елеменат из скупа двоцифрених природних бројева, овај да има цифре мање или једнаке са 3.
- 56 5. У картезијанском систему xOy сматрају се тачке $A(3,2)$ и $B(1,-1)$. Одредите координате тачке C тако да $\overline{AC} = 2\overline{BC}$.
- 56 6. Сматра се израз $E(x) = \sin 2x - 2 \operatorname{tg} x \cdot \sin \frac{2x}{3}$, где $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Докажите да $E\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.

СУБЈЕКАТ II

(30 бодова)

1. Сматрају се матрице $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $A(x) = \begin{pmatrix} x & 1-x & 1 \\ 1-x & x & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, где x реалан број.
- 56 а) Докажите да $\det(A(0)) = 2$.
- 56 б) Докажите да $A(1) \cdot A(x) - A(x-1) = 2I_3$, за било који реални број x .
- 56 в) Одредите реални број x тако да $A(1) \cdot A(1) \cdot A(x) = 3A(1) + 2I_3$.
2. На скупу $M = [0, +\infty)$ дефинише се закон слагања $x * y = \frac{xy(x+y)}{xy+1}$.
- 56 а) Докажите да $1 * 3 = 3$.
- 56 б) Докажите да $e = 1$ јесте неутралан елеменат на закону слагања „*“.
- 56 в) Одредите парове (m, n) природним ненултним бројева, са $m \leq n$, тако да $\frac{1}{m} * \frac{1}{n} = \frac{1}{16} \cdot (m * n)$.

СУБЈЕКАТ III

(30 бодова)

1. Сматра се функција $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{e^x}$.
- 56 а) Докажите да $f'(x) = \frac{(x-1)(4-x)}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 56 б) Докажите да оса Ox јесте хоризонтална асимптота према $+\infty$ на графику функције f .
- 56 в) Докажите да једначина $f(x) = n$ има јединствену солуцију, за било који ненултни природни број n .
2. Сматра се функција $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x\sqrt{x^2 + 4}$.
- 56 а) Докажите да $\int_0^2 \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 4}} dx = 2$.

56 b) Докажите да $\int_0^{\sqrt{5}} f(x) dx = \frac{19}{3}$.

56 c) За сваки природни број n , $n \geq 2$, сматра се број $I_n = \int_1^2 \frac{x^n}{f^2(x)} dx$. Одредите природни број n , $n \geq 2$, тако да $I_{n+2} + 4I_n = \frac{3}{n-1}$.