Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

I. THEMA (30 Punkte)

5p **1.** Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 1 - 2i$ und $z_2 = 2 + i$. Zeige, dass $(z_1 + i)(z_2 - 1) = 2$.

5p **2.** Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x + m$, wo m eine reelle Zahl ist. Bestimme die reellen Werte von m so, dass $f(x) > 0$, für jede reelle Zahl x.

5p **3.** Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $1 + 2\log_2 \sqrt{x-2} = \log_2 x$.

5p **4.** Gegeben ist die Menge der natürlichen zweistelligen Zahlen A. Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine gewählte Zahl aus der Menge A genau zwei Vielfache in der Menge A hat.

5p **5.** Gegeben sind die Punkte $A(-2,-2)$, $B(3,1)$ und $M(2,4)$ in dem kartesischen Koordinatensystem xOy. Bestimme die Koordinaten des Punktes N, wenn das Viereck $ABMN$ ein Parallelogramm ist.

5p **6.** Gegeben ist das Dreieck ABC, wo $\sin(A+B) + \cos C = 1$. Zeige, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist.

II. THEMA (30 Punkte)

1. Gegeben sind die Matrix $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 2 & 1 & -1 \\ a & 3 & 1 \end{pmatrix}$ und das Gleichungssystem $\begin{cases} x + 3y + az = 2 \\ 2x + y - z = -1 \\ ax + 3y + z = 1 \end{cases}$, wo a eine reelle Zahl ist.

5p **a)** Zeige, dass $\det(A(1)) = 0$.

5p **b)** Zeige, dass $B(a) \cdot B(a) \cdot B(a) = a^3 B(1)$, für jede reelle Zahl a, wobei $B(a) = A(a) - A(0)$.

5p **c)** Beweise, dass: wenn das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen hat, dann $x_0 y_0 + y_0 z_0 + z_0 x_0 \le 0$, für jede Lösung (x_0, y_0, z_0) des Gleichungssystems mit x_0, y_0 und z_0 reelle Zahlen.

2. Man definiert in der Menge der komplexen Zahlen die Verknüpfung $z_1 * z_2 = \dfrac{z_1 + z_2}{4 \cdot |z_1 z_2| + 1}$.

5p **a)** Zeige, dass $(-1) * 2 = \dfrac{1}{9}$.

5p **b)** Zeige, dass $e = 0$ das neutrale Element der Verknüpfung „$*$" ist.

5p **c)** Beweise, dass es wenigstens drei unterschiedliche, komplexe, von Null verschiedene Zahlen gibt, die die Gleichheit $|z * z| = |z|$ überprüfen.

III. THEMA (30 Punkte)

1. Gegeben ist die Funktion $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4 + 16}}{x}$.

5p **a)** Zeige, dass $f'(x) = \dfrac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{x^2 \sqrt{x^4 + 16}}$, $x \in (0,+\infty)$.

5p **b)** Bestimme die Gleichung der schiefen Asymptote gegen $+\infty$ an das Schaubild der Funktion f.

5p **c)** Bestimme die reellen Werte von m so, dass die Gleichung $f(x)+f\left(\frac{4}{x}\right)=m$ genau zwei Lösungen hat.

2. Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+1}{e^x}$.

5p **a)** Zeige, dass $\int_0^3 e^x f(x)dx=12$.

5p **b)** Zeige, dass jede Stammfunktion G der Funktion $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ konvex ist.

5p **c)** Bestimme die reelle Zahl a so, dass $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{e^x f(x)}}dx=\frac{a-\sqrt{2}}{3}$.