Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

I. FELADATSOR (30 pont)

5p **1.** Adottak a $z_1 = 1 - 2i$ és $z_2 = 2 + i$ komplex számok. Igazolja, hogy $(z_1 + i)(z_2 - 1) = 2$.

5p **2.** Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x + m$ függvény, ahol m egy valós szám. Határozza meg az m valós értékeit, amelyekre $f(x) > 0$, bármely x valós szám esetén.

5p **3.** Oldja meg a valós számok halmazában az $1 + 2\log_2\sqrt{x-2} = \log_2 x$ egyenletet!

5p **4.** Legyen A a kétjegyű természetes számok halmaza. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy véletlenszerűen kiválasztva egy elemet az A halmazból, annak pontosan két többszöröse legyen az A halmazban!

5p **5.** Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(-2,-2)$, $B(3,1)$ és $M(2,4)$ pontok. Határozza meg az N pont koordinátáit tudva azt, hogy az $ABMN$ négyszög paralelogramma!

5p **6.** Az ABC háromszögben $\sin(A+B) + \cos C = 1$. Igazolja, hogy az ABC háromszög derékszögű!

II. FELADATSOR (30 pont)

1. Adott az $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 2 & 1 & -1 \\ a & 3 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix és az $\begin{cases} x + 3y + az = 2 \\ 2x + y - z = -1 \\ ax + 3y + z = 1 \end{cases}$ egyenletrendszer, ahol a egy valós szám.

5p **a)** Igazolja, hogy $\det(A(1)) = 0$.

5p **b)** Igazolja, hogy $B(a)\cdot B(a)\cdot B(a) = a^3 B(1)$, bármely a valós szám esetén, ahol $B(a) = A(a) - A(0)$.

5p **c)** Ha az egyenletrendszernek végtelen sok megoldása van igazolja, hogy a rendszer bármely (x_0, y_0, z_0) megoldása esetén $x_0y_0 + y_0z_0 + z_0x_0 \le 0$, ahol x_0, y_0 és z_0 valós számok!

2. A komplex számok halmazán értelmezzük a $z_1 * z_2 = \dfrac{z_1 + z_2}{4\cdot|z_1z_2| + 1}$ műveletet.

5p **a)** Igazolja, hogy $(-1) * 2 = \dfrac{1}{9}$.

5p **b)** Igazolja, hogy $e = 0$ a „$*$” művelet semleges eleme!

5p **c)** Bizonyítsa be, hogy létezik legalább három különböző és nullától különböző komplex szám, amelyek teljesítik a $|z * z| = |z|$ egyenlőséget!

III. FELADATSOR (30 pont)

1. Adott az $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4+16}}{x}$ függvény.

5p **a)** Igazolja, hogy $f'(x) = \dfrac{(x^2-4)(x^2+4)}{x^2\sqrt{x^4+16}}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Határozza meg az f függvény grafikus képének ferde aszimptotáját a $+\infty$ felé!

5p **c)** Határozza meg az m valós szám azon értékeit, amelyekre az $f(x)+f\left(\frac{4}{x}\right)=m$ egyenletnek pontosan két megoldása van!

2. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+1}{e^x}$ függvény.

5p **a)** Igazolja, hogy $\int_0^3 e^x f(x)dx=12$.

5p **b)** Igazolja, hogy a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ függvény bármely G primitívje konvex!

5p **c)** Határozza meg azt az a valós számot, amelyre $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{e^x f(x)}}dx=\frac{a-\sqrt{2}}{3}$.