Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

СУБЈЕКАТ I **(30 бодова)**

5б **1.** Сматрају се комплексни бројеви $z_1 = 1-2i$ и $z_2 = 2+i$. Докажите да $(z_1+i)(z_2-1)=2$.

5б **2.** Сматра се функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+4x+m$, где m јесте реални број. Одредите реалне вредности за m тако да $f(x)>0$, за било који реални број x.

5б **3.** Решите у скупу реалних бројева једначину $1+2\log_2\sqrt{x-2}=\log_2 x$.

5б **4.** Сматра се скуп A, скуп природних двоцифрених бројева. Израчунајте вероватноћу тако да, бирајући један број из скупа A, овај да има тачно два садржаоца из скупа A.

5б **5.** У картезијанском систему xOy сматрају се тачке $A(-2,-2)$, $B(3,1)$ и $M(2,4)$. Одредите координате тачке N, знајући да четвороугао $ABMN$ је паралелограм.

5б **6.** Сматра се троугао ABC, где $\sin(A+B)+\cos C=1$. Докажите да троугао ABC је правоугли.

СУБЈЕКАТ II **(30 бодова)**

1. Сматра се матрица $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 3 & a\\ 2 & 1 & -1\\ a & 3 & 1\end{pmatrix}$ и систем једначина $\begin{cases}x+3y+az=2\\ 2x+y-z=-1\\ ax+3y+z=1\end{cases}$, где a је реални број.

5б **a)** Докажите да $\det(A(1))=0$.

5б **b)** Докажите да $B(a)\cdot B(a)\cdot B(a)=a^3B(1)$, за било који реални број a, где $B(a)=A(a)-A(0)$.

5б **c)** Докажите да, ако систем једначина има безконачан број солуција, онда $x_0y_0+y_0z_0+z_0x_0\le 0$, за било коју солуцију (x_0,y_0,z_0) система једначина, са x_0, y_0 и z_0 реални бројеви.

2. На скупу комплексних бројева дефинише се закон слагања $z_1 * z_2 = \dfrac{z_1+z_2}{4\cdot|z_1z_2|+1}$.

5б **a)** Докажите да $(-1)*2=\dfrac{1}{9}$.

5б **b)** Докажите да $e=0$ је неутралан елеменат закона „$*$”.

5б **c)** Докажите да постоју најмање три ненултни различити комплексни бројеви који проверавају једнакост $|z*z|=|z|$.

СУБЈЕКАТ III **(30 бодова)**

1. Сматра се функција $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^4+16}}{x}$.

5б **a)** Докажите да $f'(x)=\dfrac{(x^2-4)(x^2+4)}{x^2\sqrt{x^4+16}}$, $x\in(0,+\infty)$.

5б **b)** Одредите једначину косе асимптоте према $+\infty$ на график функије f.

5б **c)** Одредите реалне вредности за m тако да једначина $f(x)+f\left(\frac{4}{x}\right)=m$ има тачно две солуције.

2. Сматра се функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+1}{e^x}$.

5б **a)** Докажите да $\int_0^3 e^x f(x)\,dx=12$.

5б **b)** Докажите да било која примитивна G функције $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{1}{f(x)}$ јесте конвексна.

5б **c)** Одредите реални број a тако да $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{e^x f(x)}}\,dx=\frac{a-\sqrt{2}}{3}$.