

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

PRIMO QUESITO

(30 puncti)

- 5p** 1. Determinate il termine a_1 della progressione aritmetica $(a_n)_{n \geq 1}$, noto che $a_2 = 6$ ed $a_3 = 12$.
- 5p** 2. Si considera la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 5$. Determinate il numero reale a per il quale $f(a) + f(2a) = 2$.
- 5p** 3. Risolvete nell'insieme dei numeri reali l'equazione $5^x \cdot \frac{1}{5} = 25$.
- 5p** 4. Calcolate la probabilità, tale che, scegliendo un numero dall'insieme dei numeri naturali di due cifre, questo sia un multiplo di 16.
- 5p** 5. Nel riferimento cartesiano xOy si considerano i punti $A(3,2)$ e $B(1,4)$. Determinate le coordinate del punto C , tale che A sia il punto medio del segmento BC .
- 5p** 6. Si considera l'espressione $E(x) = \sin x + \sin \frac{3x}{2} - \cos \frac{x}{2}$, con x numero reale. Dimostrate che $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$.

SECONDO QUESITO

(30 puncti)

1. Si considerano le matrici $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $B(x) = \begin{pmatrix} x & 3-x \\ 2-x & x \end{pmatrix}$, con x numero reale.
- 5p** a) Dimostrate che $\det A = 0$.
- 5p** b) Dimostrate che $B(x) - B(0) = xA$, per qualunque numero reale x .
- 5p** c) Dimostrate che la matrice $C(a) = B(a) \cdot B(1) - B(a+1)$ è invertibile, per qualunque numero intero a .
2. Nell'insieme dei numeri reali è definita la legge di composizione $x * y = (2x-1)(2y-1) + 1$.
- 5p** a) Dimostrate che $1 * 2 = 4$.
- 5p** b) Determinate i numeri reali x per i quali $x * x = 2$.
- 5p** c) Determinate il numero intero m diverso da zero, per il quale $m * \left(1 + \frac{1}{m}\right) = 1$.

TERZO QUESITO

(30 puncti)

1. Si considera la funzione $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + 1 + \ln x$.
- 5p** a) Dimostrate che $f'(x) = \frac{4x^2 + 1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Dimostrate che $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - \ln x}{x^2 + x + 4} = 2$.
- 5p** c) Dimostrate che la funzione f è biiettiva.
2. Si considera la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x(e^x + 2x^2)$.
- 5p** a) Dimostrate che $\int_0^4 \frac{f(x)}{e^x + 2x^2} dx = 8$.

5p b) Demonstrate che $\int_0^1 (f(x) - 2x^3) dx = 1$.

5p c) Determinate il numero reale a per il quale $\int_1^2 \frac{1}{x} \cdot f(x^2) dx = \frac{e^4 - e}{2} + a$.