

Examenul național de bacalaureat 2022  
Proba E. c)

Matematică *M\_șt-nat*

Varianta 1

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p 1. Határozza meg az  $(a_n)_{n \geq 1}$  számtani haladvány  $a_1$  tagját tudva azt, hogy  $a_2 = 6$  és  $a_3 = 12$ .
- 5p 2. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x - 5$  függvény. Határozza meg az  $a$  valós számot, amelyre  $f(a) + f(2a) = 2$ .
- 5p 3. Oldja meg a valós számok halmazán az  $5^x \cdot \frac{1}{5} = 25$  egyenletet!
- 5p 4. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a kétjegyű természetes számok halmazából véletlenszerűen kiválasztva egyet, az 16 többszöröse legyen!
- 5p 5. Az  $xOy$  derékszögű koordináta-rendszerben adottak az  $A(3,2)$  és  $B(1,4)$  pontok. Határozza meg a  $C$  pont koordinátáit úgy, hogy az  $A$  pont a  $BC$  szakasz felezőpontja legyen!
- 5p 6. Adott az  $E(x) = \sin x + \sin \frac{3x}{2} - \cos \frac{x}{2}$  kifejezés, ahol  $x$  egy valós szám. Igazolja, hogy  $E\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$ .

II. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adottak az  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  és  $B(x) = \begin{pmatrix} x & 3-x \\ 2-x & x \end{pmatrix}$  mátrixok, ahol  $x$  egy valós szám.
- 5p a) Igazolja, hogy  $\det A = 0$ .
- 5p b) Igazolja, hogy  $B(x) - B(0) = xA$ , bármely  $x$  valós szám esetén!
- 5p c) Igazolja, hogy a  $C(a) = B(a) \cdot B(1) - B(a+1)$  mátrix invertálható minden  $a$  egész szám esetén!
2. A valós számok halmazán értelmezzük az  $x * y = (2x - 1)(2y - 1) + 1$  műveletet.
- 5p a) Igazolja, hogy  $1 * 2 = 4$ .
- 5p b) Határozza meg azokat az  $x$  valós számokat, amelyekre  $x * x = 2$ .
- 5p c) Határozza meg az  $m$  nullától különböző egész számot, amelyre  $m * \left(1 + \frac{1}{m}\right) = 1$ .

III. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adott az  $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2x^2 + 1 + \ln x$  függvény.
- 5p a) Igazolja, hogy  $f'(x) = \frac{4x^2 + 1}{x}$ ,  $x \in (0, +\infty)$ .
- 5p b) Igazolja, hogy  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - \ln x}{x^2 + x + 4} = 2$ .
- 5p c) Bizonyítsa be, hogy az  $f$  függvény bijektív!
2. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x(e^x + 2x^2)$  függvény.
- 5p a) Igazolja, hogy  $\int_0^4 \frac{f(x)}{e^x + 2x^2} dx = 8$ .

**5p** b) Igazolja, hogy  $\int_0^1 (f(x) - 2x^3) dx = 1$ .

**5p** c) Határozza meg az  $a$  valós számot, amelyre  $\int_1^2 \frac{1}{x} \cdot f(x^2) dx = \frac{e^4 - e}{2} + a$ .