Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

Varianta 3

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)\left(2+\sqrt{2}\right)=2$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2-4x$. Determinați abscisele punctelor de intersecție a graficului funcției f cu axa Ox.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x-3}=\dfrac{1}{2^{2x}}$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu de 11.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,0)$, $B(0,3)$ și $C(4,0)$. Arătați că triunghiul ABC este isoscel.

5p **6.** Se consideră $E(x)=\operatorname{tg}x+\sin\dfrac{3x}{2}-2\cos\dfrac{x}{2}$, unde $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. Arătați că $E\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=1$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $M(x)=\begin{pmatrix} x+1 & -x \\ -2x & 2x+1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det\left(M(1)\right)=4$.

5p **b)** Arătați că $M(x)\cdot M(1)=M(4x+1)$, pentru orice număr real x.

5p **c)** Determinați numărul real x pentru care $M(x)\cdot M(1)\cdot M(1)=M(x+2)$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=5xy+10x+10y+18$.

5p **a)** Arătați că $(-1)\circ 0=8$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ y=5(x+2)(y+2)-2$, pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numărul întreg m pentru care $m\circ m=m$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}+\ln(x-1)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x^2-x-2}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\dfrac{x^2+1}{x-1}+\ln(x-1)\ge 5$, pentru orice $x\in(1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+4}{6x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^2 f(x)\left(6x^2+1\right)dx=10$.

5p	**b)** Arătați că $\int_0^2 \left(f(x) - \frac{4}{6x^2+1} \right) dx = \frac{\ln 5}{6}$.
5p	**c)** Determinați numărul real m pentru care $\int_0^1 \frac{x+4}{f(x)} \cdot e^{2x} dx = m\left(e^2 - 1\right)$.