Examenul naţional de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

I.THEMA (30 Punkte)

5p **1.** Zeige, dass das arithmetische Mittel der Zahlen $a=20-\sqrt{21}$ und $b=22+\sqrt{21}$ gleich 21 ist.

5p **2.** Gegeben sind die Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-1$ und $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=3-x$. Zeige, dass $f(a)+g(a)=2$, für jede reelle Zahl a.

5p **3.** Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $\sqrt{7x-6}=x$.

5p **4.** Bestimme wie viele natürliche, gerade, zweistellige Zahlen die Bedingung erfüllen, dass ihre Ziffern Elemente der Menge $\{1,2,3,4\}$ sind.

5p **5.** Gegeben sind die Punkte $A(6,0)$ und $B(6,6)$ in dem kartesischen Koordinatensystem xOy. Zeige, dass das Dreieck AOM gleichschenklig ist, wobei der Punkt M die Mitte der Strecke OB ist.

5p **6.** Gegeben ist das Dreieck ABC, rechtwinklig in A so, dass $AC=4$ und das Maß des Winkels B $60°$ ist. Zeige, dass die Höhe aus der Ecke A des Dreiecks ABC die Länge 2 hat.

II.THEMA (30 Punkte)

1. Gegeben sind die Matrizen $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ und $A(x)=\begin{pmatrix}1&-x\\x&x+1\end{pmatrix}$, wobei x eine reelle Zahl ist.

5p **a)** Zeige, dass $\det(A(1))=3$.

5p **b)** Zeige, dass $A(-1)\cdot A(2)-A(-1)=2I_2$.

5p **c)** Bestimme die reellen Zahlen x so, dass $A(x)\cdot A(-x)+xA(x)=3I_2$.

2. Auf der Menge der reellen Zahlen definiert man die Verknüpfung $x\circ y=4(xy+1)-3(x+y)$.

5p **a)** Zeige, dass $1\circ 2=3$.

5p **b)** Zeige, dass: wenn $a\circ 3=4$, dann $a\circ(-a)=0$.

5p **c)** Bestimme die reellen Werte von x so, dass $(x\circ 1)\circ(x-1)\le 4$.

III.THEMA (30 Punkte)

1. Gegeben ist die Funktion $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^2+x+3-5\ln x$.

5p **a)** Zeige, dass $f'(x)=\dfrac{(x-1)(4x+5)}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Zeige, dass $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)+5\ln x}{3-x-x^2}=-2$.

5p **c)** Beweise, dass $2x^2+x\ge 3+5\ln x$ für jedes $x\in(0,+\infty)$.

2. Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(3-2x)e^x$.

5p **a)** Zeige, dass $\displaystyle\int_0^1\frac{f(x)}{e^x}\,dx=2$.

5p **b)** Zeige, dass $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx=e^2-5$.

5p **c)** Bestimme $a\in(-\infty,1)$ so, dass $\displaystyle\int_a^1\frac{e^{3x}}{f^3(x)}\,dx=\frac{2}{9}$.