

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că media aritmetică a numerelor $a = 20 - \sqrt{21}$ și $b = 22 + \sqrt{21}$ este egală cu 21.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 3 - x$. Arătați că $f(a) + g(a) = 2$, pentru orice număr real a .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{7x - 6} = x$.
- 5p** 4. Determinați câte numere naturale pare, de două cifre, au cifrele elemente ale mulțimii $\{1, 2, 3, 4\}$.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(6, 0)$ și $B(6, 6)$. Arătați că triunghiul AOM este isoscel, unde punctul M este mijlocul segmentului OB .
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ABC , dreptunghic în A , astfel încât $AC = 4$ și măsura unghiului B este egală cu 60° . Arătați că înălțimea din vârful A a triunghiului ABC are lungimea egală cu 2.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & -x \\ x & x+1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1)) = 3$.
- 5p** b) Arătați că $A(-1) \cdot A(2) - A(-1) = 2I_2$.
- 5p** c) Determinați numerele reale x pentru care $A(x) \cdot A(-x) + xA(x) = 3I_2$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 4(xy + 1) - 3(x + y)$.
- 5p** a) Arătați că $1 \circ 2 = 3$.
- 5p** b) Arătați că, dacă $a \circ 3 = 4$, atunci $a \circ (-a) = 0$.
- 5p** c) Determinați valorile reale ale lui x pentru care $(x \circ 1) \circ (x - 1) \leq 4$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + x + 3 - 5 \ln x$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{(x-1)(4x+5)}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) + 5 \ln x}{3 - x - x^2} = -2$.
- 5p** c) Demonstrați că $2x^2 + x \geq 3 + 5 \ln x$, pentru orice $x \in (0, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (3 - 2x)e^x$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^1 \frac{f(x)}{e^x} dx = 2$.
- 5p** b) Arătați că $\int_0^2 f(x) dx = e^2 - 5$.
- 5p** c) Determinați $a \in (-\infty, 1)$ pentru care $\int_a^1 \frac{e^{3x}}{f^3(x)} dx = \frac{2}{9}$.