Examenul național de bacalaureat 2022

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

I. THEMA (30 Punkte)

5p **1.** Berechne das vierte Glied b_4 der geometrischen Folge $(b_n)_{n\geq 1}$, wenn $b_1=\sqrt{2}$ und $b_2=4$.

5p **2.** Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2-2x+1$, wo m eine reelle, von Null verschiedene Zahl ist. Bestimme die reelle, von Null verschiedene Zahl m so, dass die Ox-Achse tangent an das Schaubild der Funktion f ist.

5p **3.** Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $3^{x+2}-3^x-6\cdot 3^{x-1}=6$.

5p **4.** Gegeben ist die Menge der natürlichen zweistelligen Zahlen A. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass für eine gewählte Zahl n aus der Menge A, die Zahl $2n-60$ zu der Menge A gehört.

5p **5.** In dem kartesischen Koordinatensystem xOy sind die Punkte $A(-1,4)$, $B(5,2)$ und C, die Mitte der Strecke AB gegeben. Bestimme die Gleichung der Geraden d, die durch den Punkt C geht und senkrecht auf die Gerade AB steht.

5p **6.** Gegeben ist das gleichschenklige Dreieck ABC, mit dem Maß des Winkels A gleich $120°$ und $AB=6$. Zeige, dass der Flächeninhalt des Dreiecks ABC gleich $9\sqrt{3}$ ist.

II. THEMA (30 Punkte)

1. Gegeben sind die Matrizen $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ und $B(x)=xI_2+iA$, wo x eine reelle Zahl ist und $i^2=-1$.

5p **a)** Zeige, dass $\det A=1$.

5p **b)** Bestimme die reelle Zahl x so, dass $B(3)\cdot B(5)=8B(x)$.

5p **c)** Bestimme die Paare von ganzen Zahlen (m,n) so,dass die Matrix $B(m)+iB(n)$ **nicht** umkehrbar ist .

2. Auf der Menge $M=[1,+\infty)$ definiert man die Verknüpfung $x*y=xy-\sqrt{(x-1)(y-1)}$.

5p **a)** Zeige, dass $2*5=8$.

5p **b)** Zeige, dass $e=1$ das neutrale Element der Verknüpfung „$*$” ist.

5p **c)** Beweise, dass $(nx)*y\geq x(n*y)$, für jedes $x,y\in M$ und jede natürliche Zahl n, $n\geq 2$.

III. THEMA (30 Punkte)

1. Gegeben ist die Funktion $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{4\sqrt{x}}{x^2+3}$.

5p **a)** Zeige, dass $f'(x)=\dfrac{6(1-x^2)}{\sqrt{x}(x^2+3)^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Bestimme $a\in(0,+\infty)$, wenn die Tangente an das Schaubild der Funktion f in dem Punkt $A(a,f(a))$ parallel zur Ox - Achse ist.

5p **c)** Beweise, dass $\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+3} > \dfrac{\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}}{x^2+\dfrac{1}{x^2}+5}$, für jedes $x \in (1,+\infty)$.

2. Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x+2x}{e^x}$.

5p **a)** Zeige, dass $\int_0^1 e^x f(x)\,dx = e$.

5p **b)** Zeige, dass $\int_{-1}^0 f(x)\,dx = -1$.

5p **c)** Bestimme die reelle Zahl a so, dass $\int_0^1 F(x) f''(x)\,dx = \dfrac{a(e+1)}{e^2}$, wo $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine Stammfunktion der Funktion f mit der Eigenschaft $F(0)=0$ ist.