

Simularea Examenului național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică M_mate-info
Barem de evaluare și de notare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I
(30 de puncte)

1.	$\frac{1}{z} = \frac{2}{1-i\sqrt{3}} = \frac{2(1+i\sqrt{3})}{1+3} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$	3p
	$z + \frac{1}{z} = 1$	2p
2.	Valoarea extremă a funcției f este $y_V = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{16-4a(a+2)}{4a} = \frac{a^2+2a-4}{a}$	1p
	Funcția f admite valoarea maximă -1 dacă $a < 0$ și $y_V = -1$, de unde $a = -4$	2p
	$x_V = -\frac{4}{2a} = \frac{1}{2}$, deci $4x_V - 3 = -1 = y_V$, adică $V \in d$	2p
3.	Cu substituția $3^x = t$, $t > 0$, ecuația devine $\frac{1}{t-1} - \frac{9}{t} = \frac{1}{6}$, de unde $2t^2 + t - 21 = 0$	3p
	Convine doar $t = 3$, pentru care se obține soluția $x = 1$	2p
4.	Numărul de cazuri posibile este $C_6^3 = 20$	2p
	Suma a trei numere naturale este număr par dacă toate cele trei numere sunt pare sau dacă un număr este par și celelalte două impare, deci numărul de cazuri favorabile este $C_3^3 + C_3^1 \cdot C_3^2 = 10$	2p
	Probabilitatea este $p = \frac{1}{2}$	1p
5.	Notând cu d dreapta cerută, din $d \perp AB$ rezultă că $m_d \cdot m_{AB} = -1$	1p
	$m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\frac{1}{2}$, deci $m_d = 2$	2p
	Ecuația dreptei d este $y - y_M = m_d(x - x_M)$, adică $y = 2x - 1$	2p
6.	$m(\sphericalangle ABC) = 135^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle DAB) = 180^\circ - 135^\circ = 45$	1p
	$S[ABCD] = AB \cdot AD \cdot \sin(\sphericalangle BAD) =$	2p
	$= 48\sqrt{2}$	2p

SUBIECTUL al II-lea
(30 de puncte)

1.a)	Determinantul matricei sistemului este $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3m - 3$	3p
	Sistemul are soluție unică dacă și numai dacă $\det A \neq 0$, adică $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$	2p

b)	Pentru $m \neq 1$ sistemul este compatibil determinat	1p
	Pentru $m = 1$, $\text{rang}A = 2$, iar un minor principal este $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$	2p
	Există un singur minor caracteristic și anume $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, deci sistemul este compatibil	2p
c)	Pentru $m = 1$, sistemul admite soluțiile $x = 2 - \alpha$, $y = 1$, $z = \alpha$, unde $\alpha \in R$	2p
	$x^2 + y^2 + z^2 = 2\alpha^2 - 4\alpha + 5 = 2(\alpha - 1)^2 + 3$, deci $\min M = 3$, care se obține pentru $x = y = z = 1$	3p
2.a)	$e \in G$ este element neutru dacă $x \circ e = e \circ x = x$, pentru orice $x \in G$	1p
	$x \circ e = x \Leftrightarrow e(x+1) = 0$, de unde $e = 0$	2p
	Cum $0 \in G$ și $0 \circ x = 0 \cdot x + 0 + x = x$, pentru orice $x \in G$, rezultă că $e = 0$ este elementul neutru	2p
b)	$f(x \circ y) = x \circ y + 1 = xy + x + y + 1 = (x+1)(y+1) = f(x) \cdot f(y)$, pentru orice $x, y \in G$, deci f este morfism	2p 3p
c)	$x_1 \circ x_2 = (x_1 + 1)(x_2 + 1) - 1$; $x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n = (x_1 + 1)(x_2 + 1) \dots (x_n + 1) - 1$, pentru orice $n \geq 2$ și orice $x_1, x_2, \dots, x_n \in G$	2p
	$1 \circ \frac{1}{2} \circ \frac{1}{3} \circ \dots \circ \frac{1}{2022} = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{2022}{2021} \cdot \frac{2023}{2022} - 1 = 2023 - 1 = 2022$	3p

SUBIECTUL al III-lea
(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1}$, pentru orice $x \in R$	3p
	$f'(0) = \frac{1}{2}$	2p
b)	$f''(x) = -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2}$, pentru orice $x \in R$	3p
	$f''(x) < 0$, pentru orice $x \in R$, deci f' este strict descrescătoare	2p
c)	f este continuă pe R , deci graficul funcției nu admite asimptote verticale	1p
	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{e^x}{e^x + 1} \right) = \ln 1 = 0$, deci $y = 0$ este asimptotă (orizontală) la $+\infty$	2p
	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ și $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - x) = 0$, deci $y = x$ este asimptotă (oblică) la $-\infty$	2p
2.a)	$F(1) = \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 t dt - \int_0^1 (t+1)' \cdot \ln(1+t) dt =$	3p
	$= \frac{1}{2} - (t+1) \ln(t+1) \Big _0^1 + \int_0^1 (t+1) \cdot \frac{1}{t+1} dt = \frac{1}{2} - 2 \ln 2 + \int_0^1 dt = \frac{3}{2} - 2 \ln 2$	2p
b)	Folosind succesiv regula lui L'Hospital, cazul $\left[\frac{0}{0} \right]$, rezultă $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x^3} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{3x^2} =$	2p
	$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(x+1)}{3x^2} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{x+1}}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{6x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6(x+1)} = \frac{1}{6}$	3p



c)	$f'(x) = \frac{x}{1+x}$, $x \in (-1, \infty)$, $f'(0) = 0$, $f'(x) < 0$, pentru $x \in (-1, 0)$, $f'(x) > 0$ pentru $x \in (0, \infty)$ $x = 0$ este punct de minim al funcției f , deci $f(x) \geq f(0) = 0$, pentru orice $x \in (-1, \infty)$ $F'(x) = f(x) \geq 0$, pentru orice $x \in (-1, \infty)$, deci F este crescătoare	3p 1p 1p
-----------	--	-------------------------------------