Simularea examenului național de bacalaureat 2023
Barem de evaluare și notare
Matematică ***M_st.naturii***

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct , dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I		**(30 de puncte)**
1.	$\frac{1+3i}{1-3i}+\frac{1-3i}{1+3i}=\frac{(1+3i)^2}{1-(3i)^2}+\frac{(1-3i)^2}{1-(3i)^2}=$ $=\frac{1+6i-9}{10}+\frac{1-6i-9}{10}=\frac{-16}{10}=-\frac{8}{5}$	**3p** **2p**
2.	$f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(2013)=2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{2012}$ Termenii sumei sunt în progresie geometrică cu $b_1=2^0=1,\ q=2, n=2013$ $2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{2012}=\frac{1(2^{2013}-1}{2-1}=2^{2013}-1$	**2p** **1p** **2p**
3.	$T_{k+1}=C_8^k\sqrt{3}^k=C_8^k 3^{\frac{k}{2}}$ $\frac{k}{2}\in N \Rightarrow k\in\{0,2,4,6,8\}$ deci avem 5 termeni raționali Dezvoltarea are 9 termeni, așadar 4 termenii vor fi iraționali	**2p** **2p** **1p**
4.	Se impun condițiile $\begin{cases}x+1\geq 0\\ 5-x\geq 0\end{cases} \Rightarrow x\in[-1,5]$ Prin ridicare la puterea a 2-a ecuația devine x+1 = 25 – 10x + x^2 $\Longrightarrow x^2-11x+24=$ $=0$ care are soluții $x_1=3\in[-1,5]$ și $x_2=8\notin$ [-1, 5]	**2p** **1p** **2p**
5.	$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(4-a+1)^2+(4+a-2)^2}$ $\sqrt{(5-a)^2+(2+a)^2}=5$ $25-10a+a^2+4+4a+a^2=25$ $2a^2-6a+4=0\leftrightarrow a^2-3a+2=0$ $a_1=1\ si\ a_2=2$	**1p** **1p** **1p** **1p**
6.	$sin^2x+cos^2x=1\rightarrow sin^2x+\left(-\frac{2\sqrt{6}}{5}\right)^2=1\rightarrow sin^2x=\frac{1}{25}$ $Cum\ sinx<0\ pentru\ x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)\ obținem\ \sin x=-\frac{1}{5}$	**3p** **2p**

SUBIECTUL II		**(30 de puncte)**
1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix}$	**2p**
	$\det A = 0$ *deoarece coloana 2 este egala cu coloana 3*	**3p**
1.b)	$\hat{I}nlocuirea\ corect\breve{a}\ a\ valorilor\ x = 7, y = 1, z = 1\ \hat{i}n\ fiecare\ ecua\c{t}ie\ a\ sistemului$ $7 + 4 + 4 = 15\ adev\breve{a}r, 21 + (a + 4) + 5 = 22\ \c{s}i\ 21 + 2 + (3 - a) = 16$	**2p**
	Rezolvând ecuațiile găsim $a = -8$ $și$ $a = 10$	**2p**
	Deci $(7, 1, 1)$ nu poate fi soluție a sistemului	**1p**
1.c)	Înlocuind $y_0 + y_0 = 3$ în prima ecuație a sistemului găsim $x_0 = 3$	**1p**
	Scăzând ultimele două ecuații ale sistemului obținem $(a + 2)(y_0 + z_0) = 6 \Rightarrow$ $(a + 2) * 3 = 6 \Longrightarrow a = 0$	**1p**
	Folosind valorile determinate pentru $x_0 = 3$ $și$ $a = 0$ putem rezolva sistemul $\begin{cases} y_0 + z_0 = 3 \\ 4y_0 + 5z_0 = 13 \end{cases}$	**2p**
	De unde obținem $y_0 = 2$ și $z_0 = 1$	**1p**
2.a)	$x * x = 2xy - 6x - 6y + 21 = 2x(y - 3) - 6y + 18 + 3 =$	**2p**
	$= 2x(y - 3) - 6(y - 3) + 3 =$	**2p**
	$= 2(x - 3)(y - 3) + 3$	**1p**
2.b)	$x * x = 2x^2 - 6x - 6x + 21 = 2x^2 - 12x + 21 =$	**1p**
	$= 2x^2 - 12x + 21 = 11 \Longrightarrow 2x^2 - 12x + 10 = 9 \mid : 2$	**2p**
	$x^2 - 6x + 5 = 0, \Delta = 16, x_1 = 1, x_2 = 5$	**2p**
2.c)	Se observă că $x * 3 = 3 * y = 3, \forall\, x, y \in R$	**2p**
	Luăm $x = 1 * \sqrt{2} * \dots * \sqrt{8}$ $și$ $y = \sqrt{10} * \sqrt{11} * \dots * \sqrt{2013}$	**1p**
	Operația fiind asociativă avem că $1 * \sqrt{2} * \dots * \sqrt{9} * \sqrt{10} * \dots * \sqrt{2013} = x * \sqrt{9} * y = x * 3 * y = 3$	**2p**

SUBIECTUL III		**(30 de puncte)**
1.a)	$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ Rezultă y = 0 asimptotă orizontală spre ∞ $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{\ln x}{x} = -\infty$ Rezultă x = 0 asimptotă verticală la dreapta.	**2p** **1p** **1p** **1p**
1.b)	$f'(x) = \left(\frac{(\ln x)}{(x)}\right)' = \frac{(\ln x)' * x - \ln x * (x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} * x - \ln x * 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ $f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$ $\begin{array}{c\|ccc} x & 0 & e & +\infty \\ \hline f'(x) & +++++++++++++++++++++++ & 0 & ----------------------------- \\ \hline f(x) & \nearrow & \frac{1}{e} & \searrow \end{array}$ x = e punct de maxim	**1p** **1p** **2p** **1p**
1.c)	$e < \pi, cum\ f\ este\ descrescător\ pe\ (e, +\infty)\ avem\ f(e) > f(\pi)$ $\frac{\ln e}{e} > \frac{\ln \pi}{\pi} \Rightarrow \pi \ln e > e \ln \pi \Rightarrow \ln(e^\pi) > \ln(\pi^e) \Rightarrow e^\pi > \pi^e$	**2p** **3p**
2.a)	$\int (x + f(x) - 2)dx = \int \left(x + \frac{-x^3 + 2x^2 - 5x + 8}{x^2 + 4} - 2\right) dx =$ $= \int \left(\frac{x^3 + 4x - x^3 + 2x^2 - 5x + 8 - 2x^2 - 8}{x^2 + 4}\right) dx =$ $= \int \frac{-x}{x^2 + 4} dx = -\frac{1}{2} \int (x^2 + 4)' . \frac{1}{x^2 + 4} dx = -\frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + C$	**2p** **3p**
2.b)	Cum $x + f(x) - 2 = \frac{-x}{x^2+4} \Rightarrow f(x) = -x + 2 - \frac{x}{x^2+4}$ $\int f(x)dx = \int \left(-x + 2 - \frac{x}{x^2 + 4}\right) dx = -\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 4) + C$	**2p** **3p**
2.c)	$g(x) = (x^2 + 4)f(x) = (x^2 + 4)\frac{-x^3 + 2x^2 - 5x + 8}{x^2 + 4} = -x^3 + 2x^2 - 5x + 8$ $\int g(x)dx = \int (-x^3 + 2x^2 - 5x + 8)dx = -\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 8x + C$ $\Longrightarrow G(x) = -\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 8x + c$ $G(1) = \frac{-1}{4} + \frac{2}{3} - \frac{5}{2} + 8 + C = \frac{71}{12} + c$ $G(1) = -\frac{1}{12} \Rightarrow \frac{71}{12} + c = -\frac{1}{12} \Rightarrow c = -6$ deci $G(x) = -\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3} - 5\frac{x^2}{2} + 8x - 6$	**1p** **2p** **1p** **1p**