Examenul național de bacalaureat 2023
Simulare județeană
Proba Ec)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctaj corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z^2+z+1=0 \Rightarrow z^3=1$ $z^{2023}=(z^3)^{674}\cdot z=z$, de unde obținem $z^{2023}+\frac{1}{z^{2023}}=z+\frac{1}{z}=-1$.	**2p** **3p**
2.	$f\left(x+\frac{1}{2023}\right)=\left\{2023\left(x+\frac{1}{2023}\right)\right\}=\{2023x+1\}$ $=\{2023x\}=f(x)$, pentru orice număr real x.	**3p** **2p**
3.	$(2^x-1)(2^x-4)=0 \Leftrightarrow 2^x=1$ sau $2^x=4$ $x=0$ sau $x=2$.	**3p** **2p**
4.	Sunt $8\cdot 9=72$ de numere naturale de două cifre care nu conțin cifra 2, deci sunt 72 de cazuri favorabile. Sunt 90 de numere natural de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile. $P=\frac{\text{nr.cauri favorabile}}{\text{nr.cazuri posibile}}=\frac{72}{90}=\frac{4}{5}$.	**2p** **1p** **2p**
5.	$M(-1,2)$, unde M este mijlocul segmentului AD, $m_{AB}=1$. Cum MN este paralelă cu AB, ecuația dreptei MN este $MN: x-y+3=0$.	**3p** **2p**
6.	$\frac{\sin a-\cos a}{\sin a+\cos a}=\frac{\cos a\left(\frac{\sin a}{\cos a}-1\right)}{\cos a\left(1+\frac{\sin a}{\cos a}\right)}=\frac{\mathrm{tg}a-1}{1+\mathrm{tg}a}=$ $=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$.	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(10)=\begin{pmatrix}1 & 10 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^{10}\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(10))=\begin{vmatrix}1 & 10 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^{10}\end{vmatrix}=$ $=2^{10}=1024$.	**2p** **3p**
b)	$A(x)\cdot A(2x)=A(3x)$ $A(3x)=A(x^2+2) \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x_1=1$ și $x_2=2$.	**2p** **3p**
c)	Deoarece $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$ pentru orice numere reale x și y, obținem $A(n)=A(1)\cdot A(2)\cdot \ldots \cdot A(2022)=A(1+2+\cdots+2022)=A(2023\cdot 1011)$, n=$2023\cdot 1011$, deci n este număr natural divizibil cu 2023.	 **3p** **2p**
2.a)	$x*y=3xy-3x-3y+4=3(xy-x-y+1)+1=$ $=3(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.	**3p** **2p**
b)	$x*1=1*y=1$, pentru orice numere reale x,y. $\frac{1}{1011}*\frac{2}{1011}*\frac{3}{1011}*\ldots*\frac{2023}{1011}=$	**2p**

	$=\left(\frac{1}{1011}*\frac{2}{1011}*\ldots*\frac{1010}{1011}\right)*\frac{1011}{1011}*\left(\frac{1012}{1011}*\frac{1013}{1011}*\ldots*\frac{2032}{1011}\right)=1.$	3p
c)	Elementul neutru este $\frac{4}{3}$. $x*x=\frac{4}{3}\Leftrightarrow 3(x-1)^2+1=\frac{4}{3}\Leftrightarrow (x-1)^2=\frac{1}{9}$. $x_1=\frac{2}{3}, x_2=\frac{4}{3}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	Calculul limitelor laterale în x = -2, dreapta x = -2 asimptotă verticală Graficul funcţiei nu are asimptotă orizontală la $\pm\infty$ $m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=1, n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-x)=-1, y=x-1\ asimptot\text{ă}\ oblic\text{ă}\ la+\infty$ Analog, $y=x-1\ asimptot\text{ă}\ oblic\text{ă}\ la-\infty$	2p 1p 1p 1p
b)	$Calculul\ derivatei\ f'(x)=\frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$ $f'(x)$= 0 implică $x_{1,2}=-2\pm\sqrt{3}$ Din tabelul de variaţie al funcţiei rezultă $x_1=-2-\sqrt{3}$ este punct de maxim local şi $x_2=-2+\sqrt{3}$ este punct de minim local	2p 1p 2p
c)	Se demonstrează prin inducţie matematică că $a_n>1, \forall n\geq 1$ Se deduce că şirul este descrescător $a_n>a_{n+1}\ , func\text{ț}ia\ f\ strict\ cresc\text{ă}toare\ pe(1,+\infty)\ implic\text{ă}$ $f(a_n)>f(a_{n+1})\ deci\ a_{n+1}>a_{n+2}$ Şirul este mărginit $1<a_n\leq 2, \forall n\geq 1$ Şirul este monoton şi mărginit rezultă şir convergent , deci există $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$. Trecând la limită în $rela\text{ț}ia\ a_{n+1}=f(a_n)$, obţinem $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.	2p 2p 1p
2.a)	$F\ primitiva\ lui\ f\ rezult\text{ă}$ $F'(x)=\text{arctg}\,x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. $F''(x)=\frac{1}{1+x^2}>0$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Deci functia F este convexă pe $\mathbb{R}$.	2p 3p
b)	$G(x)=\int xf(x)dx=\int xarctgxdx=\frac{x^2}{2}arctgx-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx$ $\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\int\frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx=\int(1-\frac{1}{x^2+1})dx=x-arctgx+C$ $G(x)=\frac{x^2}{2}arctgx-\frac{1}{2}(x-arctgx)+C, G(1)=-\frac{1}{2}, deci\ C=-\frac{\pi}{4}$.	2p 2p 1p
c)	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x^2)}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}f(t)dt}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2xf(x^2)}{4x^3}=$ $\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx^2}{x^2}=\frac{1}{2}$.	3p 2p