Simulare pentru EXAMENUL DE BACALAUREAT – ianuarie 2023

Probă scrisă la matematică **Varianta 1**

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Știind că $z \in \mathbb{C}$ și că $z^2 + z + 2 = 0$, demonstrați că $z^2 + \frac{4}{z^2} = -3$.

5p **2.** Rezolvați în $\mathbb{Z}$ inecuația $f(x) \geq f(1-2x)$, dacă $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{x^2-1}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{x+1}$.

5p **4.** Determinați termenul care **nu** îl conține pe *x* din dezvoltarea $\left(x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{14}$, unde $x \in (0, \infty)$.

5p **5.** Se consideră paralelogramul *ABCD* și punctele *M* și *N* astfel încât $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Demonstrați că punctele *D, M* și *N* sunt coliniare.

5p **6.** Arătați că, dacă *ABC* este un triunghi oarecare, atunci $\cos A < \frac{1}{2}\left(\frac{AB}{AC} + \frac{AC}{AB}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & 1 \\ m+1 & (m+1)^2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, unde *m* este un număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0)) = 0$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui *m* pentru care $\det(A(m)) \neq 0$.

5p **c)** În reperul cartezian (xOy) considerăm punctele necoliniare $A(1,1)$, $B(m, m^2)$, $C(m+1, (m+1)^2)$, unde $m \in \mathbb{R}$. Determinați valorile lui *m*, știind că aria triunghiului *ABC* este egală cu 1.

2. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = -5xy + 10x + 10y - 18$.

5p **a)** Demonstrați că $x * y = 2 - 5(x-2)(y-2)$, pentru orice numere reale *x* și *y*.

5p **b)** Arătați că, dacă $a * a = b$ și $b * b = a$, atunci $a = b = 2$ sau $a = b = \frac{9}{5}$.

5p **c)** Determinați numerele reale nenule m, știind că funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = me^x + 2$ verifică relația $f(x+y) = f(x) * f(y)$, pentru orice numere reale *x* și *y*.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\setminus\left\{\frac{1}{e}\right\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{1+\ln x}$.

5p **a)** Studiați existența asimptotelor verticale la graficul funcției f.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $P\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$, care este paralelă cu dreapta d, de ecuație $x-4y+2023=0$.

5p **c)** Demonstrați că $\ln\left(1+\sqrt{1+n^2}\right)\le\sqrt{1+n^2}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)dx=1+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

5p **b)** Determinați $a\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\int_0^a f(\operatorname{tg}x)dx=\frac{\pi+2\sqrt{2}}{4}$.

5p **c)** Demonstrați că $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt=0$.