INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN VRANCEA
MINISTERUL EDUCAȚIEI
Focșani, Str. Dornei, nr. 5, tel. 0237214141, fax 0237214499

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică M_şt-nat

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

Subiectul I **(30 de puncte)**

1.	Calcul $a^2=\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2=\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^2-2\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}}+\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2$ Finalizare $a^2=4-2\sqrt{2^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}=4-2=2\in\mathbb{N}$	**3p** **2p**
2.	$x_V=\frac{-b}{2a}=\frac{-4}{2m}=\frac{-2}{m},\quad y_V=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-(16+24m)}{4m}=-\frac{4+6m}{m},\ m\neq 0$ $2=4+6m\Leftrightarrow 6m=-2\Leftrightarrow m=-\frac{1}{3}$	**3p** **2p**
3.	Condiţii de existenţă : $\begin{cases}1+x\geq 0\\ x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -1\\ x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in[-1,\infty)\\ x\in[0,\infty)\end{cases}\Leftrightarrow x\in[-1,\infty)\cap[0,\infty)\Leftrightarrow x\in[0,\infty)$. Se ridică la puterea a doua și avem $\left(\sqrt{1+x}\right)^2=\left(2\sqrt{3x}\right)^2$. Se obține ecuația de grad doi $12x^2-x-1=0$ cu soluțiile $x_1=\frac{1}{3},\quad x_2=-\frac{1}{4}$. Soluția ecuației este doar $x_1=\frac{1}{3}$. Se poate renunța la condiții de existență cu obligativitatea verificării soluțiilor.	**1p** **1p** **3p**
4.	Numărul total de cazuri este 90 Calcul nr cazuri favorabile : din cele 90 numere de 2 cifre scădem numărul de numere cu ambele cifre impare care sunt 5·5=25 și pe cele cu ambele cifre pare care sunt 4·5=20 $P=\frac{\textit{număr cazuri favorabile}}{\textit{număr total cazuri}}=\frac{45}{90}=\frac{1}{2}$	**2p** **2p** **1p**
5.	ABCD paralelogram înseamnă că punctul M mijlocul diagonalei AC este în același timp și mijlocul diagonalei BD. Punctul M are coordonatele $x_M=\frac{x_A+x_C}{2}=\frac{2+0}{2}=1,\quad y_M=\frac{y_A+y_C}{2}=\frac{-1+3}{2}=1$. Pe de altă parte $x_M=\frac{x_B+x_D}{2}=1,\quad y_M=\frac{y_B+y_D}{2}=1$. Se obține punctul D (4,2). Atunci $\overrightarrow{OD}=4\vec{i}+2\vec{j}$ Finalizarea cu $\left\lvert\overrightarrow{OD}\right\rvert=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$	**2p** **1p** **1p** **1p**

6.	$\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2},\quad x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$	**2p**
	$\sin 3x+\sin 2x=\sin\pi+\sin\frac{2\pi}{3}=0+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**

Subiectul II **(30 de puncte)**

1.a)	det$A$ (-1) = $\begin{vmatrix}-1 & 4\\ -4 & -1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$(-1)(-1)-4(-4)=1+16=17$	**3p**
b)	Calculul A(2023 $-a$) + A(2023 $+a$)	**3p**
	Calcul 2 A(2023) cu finalizare	**2p**
c)	$A(x)A(y)=\begin{pmatrix}x & 4\\ -4 & x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y & 4\\ -4 & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}xy-16 & 4(x+y)\\ -4(x+y) & xy-16\end{pmatrix}$	**2p**
	$2A(-8)=2\begin{pmatrix}-8 & 4\\ -4 & -8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-16 & 8\\ -8 & -16\end{pmatrix}$. Se egalează cele două matrici și se obține sistemul	**1p**
	$\begin{cases}x+y=2\\ xy=0\end{cases}$, de unde se obțin perechile $(0,2),\quad(2,0)$.	**2p**
2.a)	$x*0=x$	**2p**
	$0*x=x$	**2p**
	Finalizare	**1p**
b)	$x*x=\frac{8x}{4+x^2}$. Se obține ecuația $\frac{8x}{4+x^2}=\frac{8}{5}$, de unde $x^2+4=5x\Leftrightarrow x^2-5x+4=0$	**3p**
	Ecuația are soluțiile 1 și 4, dar numai x=1 este din G	**2p**
c)	$f(x)*f(y)=\frac{4\left(f(x)+f(y)\right)}{4+f(x)f(y)}=\frac{8\left(\frac{x-1}{x+1}+\frac{y-1}{y+1}\right)}{4+4\frac{x-1}{x+1}\frac{y-1}{y+1}}=2\frac{(x-1)(y+1)+(y-1)(x+1)}{(x+1)(y+1)+(y-1)(x-1)}=$	**3p**
	$=\frac{2(xy-1)}{xy+1}=f(xy)$	**2p**

Subiectul III **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$. Se calculează derivata funcției f	**2p**
	$f'(x)=\left(\sqrt{x}\right)'\ln x+\sqrt{x}(\ln x)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x+\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2+\ln x}{2\sqrt{x}}$,	**2p**
	iar valoarea limitei este $f'(1)=\frac{1}{2}$	**1p**
b)	Ecuația tangentei într-un punct $\left(x_0, f(x_0)\right)\in G_f$ are forma $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$	**1p**
	Rezolvare ecuație $f(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{x}\ln x=0\Leftrightarrow\ln x=0\Leftrightarrow x=1$.	**2p**

c)	Aplicarea pentru $x_0=1$ și avem $y=\frac{1}{2}(x-1)$	2p
c)	$f'(x)=\frac{1+2\ln x}{2\sqrt{x}}$, $f'(x)=0\Leftrightarrow x=e^{-2}$ și avem f este strict descrescătoare pe $\left(0,\frac{1}{e^2}\right)$ și	1p
	este strict crescătoare pe $\left(\frac{1}{e^2},\infty\right)$, $f\left(\frac{1}{3}\right)<f\left(\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{1}{3}<\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{1}{2}$	2p
	$\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{3}}\ln 3>\frac{1}{\sqrt{2}}\ln 2\Leftrightarrow\Leftrightarrow\sqrt{2}\ln 3>\sqrt{3}\ln 2\Leftrightarrow\ln 3^{\sqrt{2}}>\ln 2^{\sqrt{3}}\Leftrightarrow 3^{\sqrt{2}}>2^{\sqrt{3}}$	2p
2.a)	$\int_0^1 f^2(x)dx=\int_0^1\left(x^2-4x+6\right)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+6x\right)\right\|_0^1=\frac{13}{3}$	5p
b)	Schimbarea de variabilă $\sqrt{x^2-4x+6}=t$, de unde $\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+6}}dx=dt$	3p
	Se obține $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{2}}dt=\sqrt{2}-\sqrt{3}$	2p
c)	$f'(x)=\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+6}}\Leftrightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$ f este descrescătoare pe intervalul $[1,2]$ și avem	3p
	$f(2)\le f(x)\le f(1),\forall x\in[1,2]$ de unde prin integrare se obține $\int_1^2\sqrt{2}dx\le\int_1^2 f(x)dx\le\int_1^2\sqrt{3}dx$	2p
	$\sqrt{2}\le\int_1^2 f(x)dx\le\sqrt{3}$	