

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

ЗАВДАННЯ I

(30 балів)

- 5р 1. Розглядають комплексне число $z = 3 + i$. Докажіть, що $z(z - 2i) = 10$.
- 5р 2. Дано функцію $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x + 1$. Докажіть, що $f(2x) - 2f(x) = -1$, для будь-якого дійсного числа x .
- 5р 3. У множині дійсних чисел розв'яжіть рівняння $\sqrt[3]{x^3 - 2x + 2} = x$.
- 5р 4. Розглядають множину A яка складається з двоцифрових натуральних чисел. Обчисліть ймовірність того, що вибираючи одне число n з множини A , число $n + 5$ є кратним 10.
- 5р 5. У декартовому репері xOy розглядають точки $A(4, 0)$ і $B(5, 4)$. Напишіть рівняння прямої d яка проходить через точку O і є паралельною до прямої AB .
- 5р 6. Розглядають прямокутний рівнобедрений трикутник ABC , A - прямиий кут, площа якого дорівнює 4. Докажіть, що $BC = 4$.

ЗАВДАННЯ II

(30 балів)

1. Дано матрицю $A(a) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & a \\ a & a+1 & -2 \end{pmatrix}$ і систему рівнянь $\begin{cases} 2x + y + 2z = 2 \\ x - y + az = 4 \\ ax + (a+1)y - 2z = a \end{cases}$, де a дійсне число.
- 5р а) Докажіть, що $\det(A(0)) = 8$.
- 5р б) Визначте множину дійсних чисел a для яких матриця $A(a)$ є обертаючою.
- 5р в) Для $a = -2$, докажіть, що $x_0 z_0 + y_0 = -2$, для будь-якого розв'язку (x_0, y_0, z_0) системи рівнянь.
2. На множині дійсних чисел задають закон композиції $x \circ y = xy + (2^x - 2)(2^y - 2)$.
- 5р а) Докажіть, що $2 \circ 3 = 18$.
- 5р б) Докажіть, що $e = 1$ - нейтральний елемент для закону композиції „ \circ ”.
- 5р в) Докажіть, що $x \circ (-x) \leq 1$, для будь-якого дійсного числа x .

ЗАВДАННЯ III

(30 балів)

1. Дано функцію $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 3 \ln \frac{x+3}{x-1}$.
- 5р а) Докажіть, що $f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 15}{(x-1)(x+3)}$, $x \in (1, +\infty)$.
- 5р б) Напишіть рівняння похилої асимптоти до $+\infty$ для графіка функції f .
- 5р в) Докажіть, що $\ln \frac{x+3}{3(x-1)} \geq 1 - \frac{x}{3}$, для будь-якого $x \in (1, +\infty)$.
2. Дано функцію $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$.
- 5р а) Докажіть, що $\int_0^3 f(x)e^x dx = 18$.

- 5p** b) Докажіть, що $\int_0^1 \frac{f(x)}{x+2} dx = \frac{e-2}{e}$.
- 5p** c) Докажіть, що $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} \int_0^x f(t) dt \right) = 1$.