Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

I.THEMA (30 Punkte)

5p **1.** Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 1+2i$ und $z_2 = 1-i$. Zeige, dass $z_1^2 + 4z_2 = 1$.

5p **2.** Gegeben sind die Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+1$ und $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2+x+m$, wobei m eine reelle Zahl ist. Bestimme die reelle Zahl m so, dass die Schaubilder der Funktionen f und g genau einen gemeinsamen Punkt haben.

5p **3.** Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $\lg\left(x^2+9\right)=2\lg\left(x\sqrt{10}\right)$.

5p **4.** Gegeben ist A die Menge der natürlichen Zahlen mit höchstens zwei Ziffern. Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass eine gewählte Zahl aus der Menge A teilbar durch 9 ist.

5p **5.** Im Dreieck ABC, ist der Punkt M die Mitte der Seite AC und die Punkte D und E gehören zur Strecke AB so, dass $AD = BE$. Zeige, dass $\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{CB}$.

5p **6.** Bestimme $x\in[0,\pi]$ so, dass $\sin 2x = 1+\cos 2x$.

II.THEMA (30 Punkte)

1. Gegeben ist die Matrix $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ und das Gleichungssystem $\begin{cases} ax+y+2z=-2 \\ x+ay-z=4 \\ 2x+2y+z=2 \end{cases}$, wobei a eine reelle Zahl ist.

5p **a)** Zeige, dass $\det\left(A(0)\right)=1$.

5p **b)** Bestimme die Menge der reellen Zahlen a so, dass das Gleichungssystem eine einzige Lösung hat.

5p **c)** Für $a=1$, bestimme die Lösungen (x_0,y_0,z_0) des Gleichungssystems, wobei x_0, y_0 und z_0 ganze Zahlen sind und $x_0 > y_0 > z_0$.

2. Auf der Menge $M=[-1,1]$ definiert man die Verknüpfung $x * y = \dfrac{xy}{1+\sqrt{\left(1-x^2\right)\left(1-y^2\right)}}$.

5p **a)** Zeige, dass $1 * \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

5p **b)** Zeige, dass $x * (-x) \geq -x^2$, für jedes $x\in M$.

5p **c)** Bestimme die Paare (a,b) von Zahlen aus der Menge M so, dass $a * b = 1$.

III.THEMA (30 Punkte)

1. Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-1-\ln\left(e^x+x^2\right)$.

5p **a)** Zeige, dass $f'(x)=\dfrac{x(x-2)}{e^x+x^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Bestimme die reellen Zahlen a so, dass die Tangente an das Schaubild der Funktion f in dem Punkt mit den Koordinaten $(a, f(a))$ parallel zur Ox Achse ist.

5p **c)** Bestimme die Bildmenge der Funktion f.

2. Gegeben ist die Funktion $f:(-3,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x+3}}$.

5p **a)** Zeige, dass $\int_0^3 f(x)\sqrt{x+3}\,dx=12$.

5p **b)** Zeige, dass $\int_{-2}^1 \dfrac{f(x)}{x^2+1}\,dx=2$.

5p **c)** Beweise, dass $\int_0^1 \dfrac{1}{f(x)}\,dx\le\dfrac{\pi}{2}$.