

Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică $M_mate-info$

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

СУБЈЕКАТ I

(30 бодова)

- 56 1. Сматрају се комплексни бројеви $z_1 = 1 + 2i$ и $z_2 = 1 - i$. Докажите да $z_1^2 + 4z_2 = 1$.
- 56 2. Сматрају се функције $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 1$ и $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + x + m$, где m је реалан број. Одредите реалан број m тако да графици функција f и g имају само једну пресечену заједичну тачку.
- 56 3. Решите у скупу реалних бројева једначину $\lg(x^2 + 9) = 2\lg(x\sqrt{10})$.
- 56 4. Сматра се скуп A , скуп природних бројева максимално двоцифрени. Одредите вероватноћу тако да, бирајући један број из скупа A , он да буде дељив са 9.
- 56 5. У троуглу ABC , тачка M је средина странице AC , тачке D и E припадају дужи AB , тако да $AD = BE$. Докажите да $\overline{MD} + \overline{ME} = \overline{CB}$.
- 56 6. Одредите $x \in [0, \pi]$ тако да $\sin 2x = 1 + \cos 2x$.

СУБЈЕКАТ II

(30 бодова)

1. Сматра се матрица $A(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ и систем једначина $\begin{cases} ax + y + 2z = -2 \\ x + ay - z = 4 \\ 2x + 2y + z = 2 \end{cases}$, где a јесте реалан број.
- 56 а) Докажите да $\det(A(0)) = 1$.
- 56 б) Одредите скуп реалних бројева a тако да систем једначина има јединствено решење.
- 56 с) За $a = 1$, одредите солуције (x_0, y_0, z_0) система тако да x_0, y_0 и z_0 су цели бројеви и $x_0 > y_0 > z_0$.
2. На скупу $M = [-1, 1]$ дефинише се закон слагања $x * y = \frac{xy}{1 + \sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}}$.
- 56 а) Докажите да $1 * \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.
- 56 б) Докажите да $x * (-x) \geq -x^2$, за било које $x \in M$.
- 56 с) Одредите парове (a, b) бројева из скупа M тако да $a * b = 1$.

СУБЈЕКАТ III

(30 бодова)

1. Сматра се функција $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1 - \ln(e^x + x^2)$.
- 56 а) Докажите да $f'(x) = \frac{x(x-2)}{e^x + x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 56 б) Одредите реалне бројеве a тако да тангенс на график функције f у тачку са координатама $(a, f(a))$ је паралелна са осом Ox .
- 56 с) Одредите слику функције f .

2. Сматра се функција $f : (-3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x+3}}$.

56 a) Докажите да $\int_0^3 f(x) \sqrt{x+3} dx = 12$.

56 b) Докажите да $\int_{-2}^1 \frac{f(x)}{x^2 + 1} dx = 2$.

56 c) Докажите да $\int_0^1 \frac{1}{f(x)} dx \leq \frac{\pi}{2}$.