

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 puncte)

- 5p 1. Determinați al cincilea termen al progresiei aritmetice $(a_n)_{n \geq 1}$, știind că $a_1 = -1$ și $a_3 = 7$.
- 5p 2. Determinați numărul real a , știind că punctul $A(-1, a)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 4x - 1$.
- 5p 3. Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $5^{x^2-5x} = \frac{1}{625}$.
- 5p 4. Aflați câte numere naturale de trei cifre distincte se pot forma cu cifrele 0,2,4,6 și 8.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$ și $B(3,5)$. Determinați ecuația mediatoarei segmentului $[AB]$.
- 5p 6. Știind că $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ și $\sin x = \frac{1}{3}$, calculați $\sin(2x)$.

SUBIECTUL II

(30 puncte)

- 5p 1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- 5p a) Să se arate că, dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relația $X \cdot A = A \cdot X$, atunci există $u, v \in \mathbb{R}$, astfel încât $X = \begin{pmatrix} u & 0 \\ v & u \end{pmatrix}$.
- 5p b) Calculați $A^n, n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p c) Rezolvați în $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, ecuația $X^4 = A$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție asociativă, definită prin $x \circ y = 2xy + 2x + 2y + 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p a) Arătați că $x \circ y = 2(x+1)(y+1) - 1, \forall x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Aflați două elemente $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ astfel încât $a \circ b \in \mathbb{N}$.
- 5p c) Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $x \circ x \circ x = x$.

SUBIECTUL III

(30 puncte)

- 5p 1. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{\ln x}{x}$.
- 5p a) Determinați asimptotele funcției f .
- 5p b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f .
- 5p c) Arătați că $f(x) \leq \frac{1}{e}, \forall x \in (0, \infty)$.
2. Se consideră funcțiile $f, F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = (x-1)e^x$ și $F(x) = (x-a)e^x + b$, unde $a, b \in \mathbb{R}$.
- 5p a) Determinați numerele reale a, b știind că F este o primitivă a funcției f .
- 5p b) Pentru $a = 2$ și $b = e$, calculați $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x)}{(x-1)^2}$.
- 5p c) Arătați că orice primitivă a funcției F este convexă pe intervalul $[1, \infty)$.