

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

ЗАВДАННЯ I

(30 балів)

- 5р 1. Докажіть, що $4 - 6\sqrt{3} + 3(2\sqrt{3} - 1) = 1$.
- 5р 2. Розглядають функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 3$ і $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 2x + 3$. Знайдіть дійсне число a для якого $f(a) = g(a)$.
- 5р 3. У множині дійсних чисел розв'яжіть рівняння $2^{2x+1} \cdot 2^3 = 1$.
- 5р 4. Знайдіть скільки двоцифрових різних натуральних чисел можна утворити з цифрами множини $A = \{3, 4, 5, 6\}$.
- 5р 5. У декартовому репері xOy розглядають точки $A(4, 0)$, $B(0, 2)$, $C(3, 3)$ і M - середина відрізка AB . Докажіть, що відрізки MO і MC мають однакові довжини.
- 5р 6. Дано $E(x) = 2 \sin x \sin 2x - \cos x$, де x - дійсне число. Докажіть, що $E\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

ЗАВДАННЯ II

(30 балів)

1. Дано матриці $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ і $A(a) = \begin{pmatrix} 3+a & 2-2a \\ 1-a & 1+3a \end{pmatrix}$, де a - дійсне число.
- 5р а) Докажіть, що $\det(A(0)) = 1$.
- 5р б) Докажіть, що $A(0) \cdot (A(a) - A(0)) = aI_2$, для будь-якого дійсного числа a .
- 5р в) Докажіть, що $\det(A(a^2) - aA(a)) \geq 0$, для будь-якого дійсного числа a .
2. На множині дійсних чисел задають закон композиції $x \circ y = x^2 - 4xy + 3y^2$.
- 5р а) Докажіть, що $0 \circ 2 = 12$.
- 5р б) Визначте дійсні числа x для яких $(2x) \circ x = -1$.
- 5р в) Визначте пари (m, n) цілих чисел, де $m < n$, для яких $m \circ n = 3$.

ЗАВДАННЯ III

(30 балів)

1. Розглядають функцію $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5 + \frac{4x-4}{x^2}$.
- 5р а) Докажіть, що $f'(x) = \frac{4(2-x)}{x^3}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5р б) Напишіть рівняння горизонтальної асимптоти до $+\infty$ для графіка функції f .
- 5р в) Докажіть, що $|f(x) - f(y)| \leq 1$, для будь-якого $x, y \in [1, +\infty)$.
2. Розглядають функцію $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 4 \ln x$.
- 5р а) Докажіть, що $\int_1^2 (f(x) - 4 \ln x) dx = 7$.
- 5р б) Докажіть, що $\int_1^e x(f(x) - 3x^2) dx = e^2 + 1$.
- 5р в) Докажіть, що $\int_1^{\sqrt{e}} f(x) F''(x) dx = \frac{(3e-1)(3e+5)}{2}$, для будь-якої первісної $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ для функції f .