Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 7

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

THEMA I (30 Punkte)

5p	**1.** Zeige, dass $3-4i+i(4-i)=4$, wobei $i^2=-1$.
5p	**2.** Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=4-2x$. Zeige, dass $(f\circ f)(1)=0$.
5p	**3.** Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $\log_5\left(x^2-2x+6\right)=\log_5 6$.
5p	**4.** Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass eine aus der Menge der zweistelligen, natürlichen Zahlen gewählte Zahl teilbar durch 3 und 7 ist.
5p	**5.** Gegeben sind die Punkte $A(1,2)$, $B(a,0)$ und $C(0,b)$ in dem kartesischen Koordinatensystem xOy. Bestimme die reellen Zahlen a und b, wenn der Punkt A Mitte der Strecke BC ist.
5p	**6.** Gegeben ist das Dreieck ABC, mit $AB=AC=10$ und $BC=16$. Zeige, dass $AD=6$, wenn AD Höhe in dem Dreieck ABC ist.

THEMA II (30 Punkte)

	1. Gegeben sind die Matrizen $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $A=\begin{pmatrix}1&2\\-1&-2\end{pmatrix}$ und $B(x)=\begin{pmatrix}x+1&2x+1\\x-1&2x-1\end{pmatrix}$, wobei x eine reelle Zahl ist .
5p	**a)** Zeige, dass $\det(B(2))=4$.
5p	**b)** Bestimme die reelle Zahl a so, dass $B(0)\cdot B(1)=aA$.
5p	**c)** Bestimme die reelle Zahl x so, dass $A\cdot B(x)=A\cdot\left(B(0)-3I_2\right)$.
	2. Gegeben ist das Polynom $f=X^3+2X^2+mX-3$, wobei m eine reelle Zahl ist .
5p	**a)** Für $m=0$, zeige, dass $f(1)=0$.
5p	**b)** Bestimme die reelle Zahl m für die das Polynom f durch das Polynom $X+1$ teilbar ist.
5p	**c)** Bestimme die reelle Zahl m so, dass $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)=x_1x_2x_3$, wobei x_1, x_2 und x_3 die Wurzeln des Polynoms f sind.

THEMA III (30 Punkte)

	1. Gegeben ist die Funktion $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2+x-2}$.
5p	**a)** Zeige, dass $f'(x)=\dfrac{3x(x-4)}{\left(x^2+x-2\right)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.
5p	**b)** Bestimme die Gleichung der horizontalen Asymptote gegen $+\infty$ an das Schaubild der Funktion f.
5p	**c)** Beweise, dass $f(x)+f\left(x^2\right)\geq\dfrac{17}{3}$, für jedes $x\in(1,2]$.
	2. Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x(x-1)^2$.
5p	**a)** Zeige, dass $\displaystyle\int_3^7\frac{f(x)}{(x-1)^2}\,dx=20$.
5p	**b)** Zeige, dass $\displaystyle\int_2^3\frac{x}{f(x)}\,dx=\frac{1}{2}$.
5p	**c)** Zeige, dass $\displaystyle\int_0^1\frac{xf\left(e^x\right)}{e^x}\,dx=\frac{e^2-5}{4}$.