

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p** 1. Igazolja, hogy $3 - 4i + i(4 - i) = 4$, ahol $i^2 = -1$.
- 5p** 2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4 - 2x$ függvény. Igazolja, hogy $(f \circ f)(1) = 0$.
- 5p** 3. Oldja meg a valós számok halmazán a $\log_5(x^2 - 2x + 6) = \log_5 6$ egyenletet!
- 5p** 4. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a kétjegyű természetes számok halmazából véletlenszerűen kiválasztott szám osztható legyen 3-mal és 7-tel!
- 5p** 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(1,2)$, $B(a,0)$ és $C(0,b)$ pontok. Határozza meg az a és b valós számot, tudva azt, hogy az A pont a BC szakasz felezőpontja!
- 5p** 6. Az ABC háromszögben $AB = AC = 10$ és $BC = 16$. Igazolja, hogy $AD = 6$, ahol AD az ABC háromszög magassága!

II. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adottak az $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ és $B(x) = \begin{pmatrix} x+1 & 2x+1 \\ x-1 & 2x-1 \end{pmatrix}$ mátrixok, ahol x valós szám.
- 5p** a) Igazolja, hogy $\det(B(2)) = 4$.
- 5p** b) Határozza meg azt az a valós számot, amelyre $B(0) \cdot B(1) = aA$.
- 5p** c) Határozza meg azt az x valós számot, amelyre $A \cdot B(x) = A \cdot (B(0) - 3I_2)$.
2. Adott az $f = X^3 + 2X^2 + mX - 3$ polinom, ahol m valós szám.
- 5p** a) Az $m = 0$ esetén igazolja, hogy $f(1) = 0$.
- 5p** b) Határozza meg azt az m valós számot, amelyre az f polinom osztható az $X + 1$ polinommal!
- 5p** c) Határozza meg azt az m valós számot, amelyre $(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) = x_1 x_2 x_3$, ahol x_1 , x_2 és x_3 az f polinom gyökei!

III. FELADATSOR

(30 punct)

1. Adott az $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + x - 2}$ függvény.
- 5p** a) Igazolja, hogy $f'(x) = \frac{3x(x-4)}{(x^2 + x - 2)^2}$, $x \in (1, +\infty)$.
- 5p** b) Határozza meg az f függvény grafikus képe vízszintes aszimptotájának egyenletét a $+\infty$ felé!
- 5p** c) Igazolja, hogy $f(x) + f(x^2) \geq \frac{17}{3}$, bármely $x \in (1, 2]$ esetén!
2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x(x-1)^2$ függvény.
- 5p** a) Igazolja, hogy $\int_3^7 \frac{f(x)}{(x-1)^2} dx = 20$.
- 5p** b) Igazolja, hogy $\int_2^3 \frac{x}{f(x)} dx = \frac{1}{2}$.
- 5p** c) Igazolja, hogy $\int_0^1 \frac{xf(e^x)}{e^x} dx = \frac{e^2 - 5}{4}$.