Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că numerele $5-2\sqrt{6}$, 1 și $5+\sqrt{24}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax+1$, unde a este număr real nenul. Determinați numărul real nenul a pentru care $(f\circ f)(1)=1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{2-x}=32$.

5p **4.** Determinați numărul de submulțimi ordonate, cu câte două elemente, care se pot forma cu elementele mulțimii $M=\{0,1,2,3,4\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2,1)$ și $B(2,5)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul B și este perpendiculară pe dreapta AB.

5p **6.** Arătați că $(\operatorname{tg}x+1)(\operatorname{ctg}x-1)=2\operatorname{ctg}2x$, pentru orice $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 1 & a+1 \\ 1 & a & -1 \\ 2 & -a & 4 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+y+(a+1)z=a \\ x+ay-z=4 \\ 2x-ay+4z=-4 \end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=-9$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui a pentru care sistemul are soluție unică.

5p **c)** Arătați că, dacă sistemul are soluția unică (x_0,y_0,z_0), atunci $x_0+y_0+z_0=2$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-3X^2+2X+m$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=6$, arătați că $f(-1)=0$.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care polinomul f este divizibil cu polinomul $g=X^2+2$.

5p **c)** Determinați numărul real m pentru care $x_1^3+x_2^3+x_3^3=0$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\frac{\sqrt{x+1}}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=1-\frac{2x+1}{2e^x\sqrt{x+1}}$, $x\in(-1,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $f(x)-x\le\sqrt{\frac{e}{2}}$, pentru orice $x\in(-1,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 3\left(f(x)-x\ln x\right)dx=7$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^e \frac{f(x)}{x^3}\,dx = 2\left(1-\frac{1}{e}\right)$.

5p **c)** Arătați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{x+1}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=e$ are aria strict mai mare decât 1.