Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

I. THEMA (30 Punkte)

5p **1.** Zeige, dass $2(1+i)-i(2-i)=1$, wobei $i^2=-1$.

5p **2.** Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+10$. Bestimme die reelle Zahl a so, dass der Punkt $A(2a,a)$ zum Schaubild der Funktion f gehört.

5p **3.** Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $\sqrt{2x^2+2}=2x$.

5p **4.** Bestimme wie viele natürliche ungerade dreistellige Zahlen, kann man mit den Elementen der Menge $A=\{0,1,2,3,4\}$ bilden.

5p **5.** Bestimme die reelle Zahl a so, dass die Vektoren $\vec{u}=a\vec{i}+(a-1)\vec{j}$ und $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}$ kollinear sind.

5p **6.** Gegeben ist das Dreieck ABC, rechtwinklig in A, mit dem Maß des Winkels B gleich mit $\frac{\pi}{6}$ und $BC=24$. Die Winkelhalbierende des Winkels C des Dreiecks ABC schneidet die Seite AB in dem Punkt D. Bestimme die Länge der Strecke CD.

II. THEMA (30 Punkte)

1. Gegeben sind die Matrizen $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ und $A(x)=\begin{pmatrix}x+1&-1&1\\0&x&0\\1&-1&x+1\end{pmatrix}$, wobei x eine reelle Zahl ist.

5p **a)** Zeige, dass $\det(A(1))=3$.

5p **b)** Bestimme die reelle Zahl x so, dass $A(0)\cdot A(x)=A(0)$.

5p **c)** Bestimme die reellen Zahlen a und b so, dass $(A(1))^{-1}=aA(1)+bI_3$, wobei $(A(1))^{-1}$ die Umkehrmatrix der Matrix $A(1)$ ist.

2. Auf der Menge der reellen Zahlen wird die Verknüpfung $x*y=xy+x+y-1+2^{xy}$ definiert.

5p **a)** Zeige, dass $1*2=8$.

5p **b)** Zeige, dass $e=0$ das neutrale Element der Verknüpfung „$*$” ist.

5p **c)** Bestimme die von Null verschiedene natürliche Zahl n so, dass $n*\left(-\frac{1}{n}\right)=0$.

III. THEMA (30 Punkte)

1. Gegeben ist die Funktion $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+1+\ln x}{x}$.

5p **a)** Zeige, dass $f'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Bestimme die Gleichung der horizontalen Asymptote gegen $+\infty$ an das Schaubild der Funktion f.

5p **c)** Beweise, dass $\frac{\ln y}{y}-\frac{\ln x}{x}<\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$, für alle $x,y\in(1,+\infty)$ mit $x<y$.

2. Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x$.

5p **a)** Zeige, dass $\int_3^5\left(f(x)-x^3\right)dx=8$.

5p **b)** Zeige, dass $\int_0^2 \frac{x^2}{f(x)-x+2}dx = \frac{\ln 5}{3}$.

5p **c)** Gegeben ist die Funktion $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)e^{-x}}{x}$. Zeige, dass jede Stammfunktion $G:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ der Funktion g konkav ist.