Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_șt-nat*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

PRIMO QUESITO (30 punti)

5p **1.** Dimostrate che $2(1+i)-i(2-i)=1$, con $i^2=-1$.

5p **2.** Si considera la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x+10$. Determinate il numero reale a per il quale il punto $A(2a,a)$ appartiene al grafico della funzione f.

5p **3.** Risolvete nell'insieme dei numeri reali l'equazione $\sqrt{2x^2+2}=2x$.

5p **4.** Determinate quanti numeri naturali dispari, di tre cifre, possono essere formati con gli elementi dell'insieme $A=\{0,1,2,3,4\}$.

5p **5.** Determinate il numero reale a per il quale i vettori $\vec{u}=a\vec{i}+(a-1)\vec{j}$ e $\vec{v}=\vec{i}+2\vec{j}$ sono alineati.

5p **6.** Si considera il triangolo ABC, con l'angolo retto A, l'angolo B di misura uguale a $\frac{\pi}{6}$ e $BC=24$. La bisettrice dell'angolo C del triangolo ABC interseca il lato AB nel punto D. Determinate la lunghezza del segmento CD.

SECONDO QUESITO (30 punti)

1. Si considerano le matrici $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ ed $A(x)=\begin{pmatrix}x+1&-1&1\\0&x&0\\1&-1&x+1\end{pmatrix}$, con x numero reale.

5p **a)** Dimostrate che $\det(A(1))=3$.

5p **b)** Determinate il numero reale x per il quale $A(0)\cdot A(x)=A(0)$.

5p **c)** Determinate i numeri reali a e b per i quali $(A(1))^{-1}=aA(1)+bI_3$, dove $(A(1))^{-1}$ è l'inversa della matrice $A(1)$.

2. Nell'insieme dei numeri reali è definita la legge di composizione $x*y=xy+x+y-1+2^{xy}$.

5p **a)** Dimostrate che $1*2=8$.

5p **b)** Dimostrate che $e=0$ è l'elemento neutro della legge di composizione „$*$”.

5p **c)** Determinate il numero naturale n diverso da zero per il quale $n*\left(-\frac{1}{n}\right)=0$.

TERZO QUESITO (30 punti)

1. Si considera la funzione $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{2x+1+\ln x}{x}$.

5p **a)** Dimostrate che $f'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinate l'equazione dell'asintoto orizzontale verso $+\infty$ del grafico della funzione f.

5p **c)** Dimostrate che $\frac{\ln y}{y}-\frac{\ln x}{x}<\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$, per qualsiasi $x,y\in(1,+\infty)$ con $x<y$.

2. Si considera la funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x$.

5p **a)** Dimostrate che $\int_3^5\left(f(x)-x^3\right)dx=8$.

5p **b)** Dimostrate che $\int_0^2 \frac{x^2}{f(x)-x+2}dx=\frac{\ln 5}{3}$.

5p **c)** Si considera la funzione $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{f(x)e^{-x}}{x}$. Dimostrate che qualsiasi primitiva $G:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ della funzione g è concava.