

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică *M_{st-nat}*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p 1. Igazolja, hogy $2(1+i) - i(2-i) = 1$, ahol $i^2 = -1$.
- 5p 2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 10$ függvény. Határozza meg azt az a valós számot, amelyre az $A(2a, a)$ pont rajta van az f függvény grafikus képén!
- 5p 3. Oldja meg a valós számok halmazán a $\sqrt{2x^2 + 2} = 2x$ egyenletet!
- 5p 4. Határozza meg, hogy hány háromjegyű páratlan természetes szám képezhető az $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ halmaz elemeivel!
- 5p 5. Határozza meg azt az a valós számot, amelyre az $\vec{u} = a\vec{i} + (a-1)\vec{j}$ és $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$ vektorok kollineárisak!
- 5p 6. Az A -ban derékszögű ABC háromszögben a B szög mértéke $\frac{\pi}{6}$ és a $BC = 24$. Az ABC háromszög C szögének szögfelezője az AB oldalt a D pontban metszi. Határozza meg CD szakasz hosszát!

II. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adottak az $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ és az $A(x) = \begin{pmatrix} x+1 & -1 & 1 \\ 0 & x & 0 \\ 1 & -1 & x+1 \end{pmatrix}$ mátrixok, ahol x valós szám.

- 5p a) Igazolja, hogy $\det(A(1)) = 3$.
- 5p b) Határozza meg azt az x valós számot, amelyre teljesül az $A(0) \cdot A(x) = A(0)$ egyenlőség!
- 5p c) Határozza meg azokat az a és b valós számokat, amelyekre $(A(1))^{-1} = aA(1) + bI_3$, ahol az $(A(1))^{-1}$ mátrix az $A(1)$ mátrix inverze!
2. A valós számok halmazán értelmezzük az $x * y = xy + x + y - 1 + 2^{xy}$ műveletet.
- 5p a) Igazolja, hogy $1 * 2 = 8$.
- 5p b) Igazolja, hogy az $e = 0$ a „ $*$ ” művelet semleges eleme!
- 5p c) Határozza meg azt az n nullától különböző természetes számot, amelyre $n * \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$.

III. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+1+\ln x}{x}$ függvény.

- 5p a) Igazolja, hogy $f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Határozza meg az f függvény vízszintes aszimptotájának egyenletét a $+\infty$ felé!
- 5p c) Bizonyítsa be, hogy $\frac{\ln y}{y} - \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$, bármely $x < y$, $x, y \in (1, +\infty)$ esetén!
2. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x$ függvény.

- 5p a) Igazolja, hogy $\int_3^5 (f(x) - x^3) dx = 8$.

5p b) Igazolja, hogy $\int_0^2 \frac{x^2}{f(x) - x + 2} dx = \frac{\ln 5}{3}$.

5p c) Adott a $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(x)e^{-x}}{x}$ függvény. Igazolja, hogy a g függvény bármely $G: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ primitív függvénye konkáv!