

Examenul național de bacalaureat 2023

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

ЗАВДАННЯ I

(30 балів)

- 56 1. Докажіть, що $2(1+i) - i(2-i) = 1$, де $i^2 = -1$.
- 56 2. Розглядають функцію $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x + 10$. Визначте дійсне число a для якого точка $A(2a, a)$ належить графіку функції f .
- 56 3. У множині дійсних чисел розв'яжіть рівняння $\sqrt{2x^2 + 2} = 2x$.
- 56 4. Визначте скільки непарних трьохцифрових натуральних чисел можна утворити з елементами множини $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
- 56 5. Знайдіть дійсне число a для яких вектори $\vec{u} = a\vec{i} + (a-1)\vec{j}$ і $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j}$ є колінарними.
- 56 6. Розглядають трикутник ABC , прямокутний у вершині A , міра кута B дорівнює $\frac{\pi}{6}$ і $BC = 24$. Бісектриса кута C трикутника ABC перетинає сторону AB у точці D . Визначте довжину відрізка CD .

ЗАВДАННЯ II

(30 балів)

1. Розглядають матриці $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ і $A(x) = \begin{pmatrix} x+1 & -1 & 1 \\ 0 & x & 0 \\ 1 & -1 & x+1 \end{pmatrix}$, де x - дійсне число.
- 56 а) Докажіть, що $\det(A(1)) = 3$.
- 56 б) Знайдіть дійсне число x для якого $A(0) \cdot A(x) = A(0)$.
- 56 в) Знайдіть дійсні числа a і b для яких $(A(1))^{-1} = aA(1) + bI_3$, де $(A(1))^{-1}$ - обернена матриця до матриці $A(1)$.
2. На множині дійсних чисел задають закон композиції $x * y = xy + x + y - 1 + 2^{xy}$.
- 56 а) Докажіть, що $1 * 2 = 8$.
- 56 б) Докажіть, що $e = 0$ - нейтральний елемент для закону композиції „*”.
- 56 в) Знайдіть ненульове натуральне число n для якого $n * \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$.

ЗАВДАННЯ III

(30 балів)

1. Розглядають функцію $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2x+1+\ln x}{x}$.
- 56 а) Докажіть, що $f'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 56 б) Напишіть рівняння горизонтальної асимптоти до $+\infty$ до графіка функції f .
- 56 в) Докажіть, що $\frac{\ln y}{y} - \frac{\ln x}{x} < \frac{1}{x} - \frac{1}{y}$, для будь-яких $x, y \in (1, +\infty)$ і $x < y$.
2. Розглядають функцію $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x$.
- 56 а) Докажіть, що $\int_3^5 (f(x) - x^3) dx = 8$.

56 b) Докажіть, що $\int_0^2 \frac{x^2}{f(x) - x + 2} dx = \frac{\ln 5}{3}$.

56 c) Розглядають функцію $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{f(x)e^{-x}}{x}$. Докажіть, що будь-яка первісна $G : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ до функції g є опуклою.