EXAMENUL DE BACALAUREAT 2023

Proba E.c) Matematică M_șt.naturii, Simulare județeană

Filiera teoretică: profilul real, specializarea științele naturii.

• Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.

• Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

5p **1.** Calculați $\left(\sqrt{23}+4\right)\cdot\left\{\sqrt{23}\right\}$, unde $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a lui a.

5p **2.** Fie funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=4x-5,\ g(x)=x+a$.
Determinați $a\in\mathbb{R}$, astfel încât $(f\circ g)(x)=4x+3,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{2x+1}-26\cdot 5^{x}+5=0$.

5p **4.** Într-un laborator lucrează 12 cercetători dintre care 4 sunt biologi și 8 sunt chimiști. În câte moduri pot fi formate echipe de cercetare formate din 5 cercetători dintre care 3 sunt chimiști?

5p **5.** Determinați $m\in\mathbb{R}$, astfel încât vectorii $\vec{u}=m\vec{i}-3\vec{j}$ și $\vec{v}=(m-1)\vec{i}+2\vec{j}$ să fie ortogonali.

5p **6.** Calculați $tg\,x,\ x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, dacă se știe că $\sin x=\frac{3}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix}$.

5p **a)** Rezolvați ecuația $\det(A-xI_2)=0$.

5p **b)** Demonstrați că, dacă matricea $X\in M_2(\mathbb{R})$ verifică relația $AX=XA$, atunci există numerele $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât X este de forma $X=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$.

5p **c)** Arătați că ecuația $X^2=A$ are patru soluții în $M_2(\mathbb{R})$.

2. Pe mulțimea $G=(8,\infty)$ se definește legea de compoziție: $x\circ y=xy-8x-8y+72,\ \forall x,y\in G$.

5p **a)** Demonstrați că G este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție "$\circ$".

5p **b)** Arătați că $(G,\circ)$ este grup abelian.

5p **c)** Demonstrați că funcția $f:(0,\infty)\to G,\ f(x)=x+8$ este izomorfism de la grupul $\left((0,\infty),\cdot\right)$ la grupul $\left(G,\circ\right)$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln x-\frac{x-1}{2x}$.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

5p **b)** Arătați că $\ln x\geq\frac{x-1}{2x},\ \forall x\in(1,\infty)$.

5p **c)** Determinați numărul punctelor de inflexiune ale graficului funcției f.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+2x+3}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 (x^3+2x^2+3x)\cdot f(x)\,dx=\dfrac{16}{3}$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1\left(f(x)+\dfrac{x}{x^2+2x+3}\right)dx$.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{F(x)}{\ln x}$, unde F este o primitivă a funcției f.