

Examenul național de bacalaureat 2024

Proba E. c)

 Matematică *M_mate-info*

Model februarie 2024

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I
(30 puncte)

1.	$z = 1 - i \Rightarrow z^2 = -2i, z^3 = -2i - 2$ $z^3 = z^2 - 2$	3p 2p
2.	Dacă $a^2 - 12 \geq 0$, ecuația are soluții reale Cum $x_1 + x_2 = 4$ și $x_1 + x_2 = -a \Rightarrow a = -4$ care convine	2p 3p
3.	$\log_2 x - 1 + \frac{1}{\log_2 x} = 1 \Leftrightarrow (\log_2 x - 1)^2 = 0, x \in (0, \infty) \setminus \{1\}$ $\log_2 x - 1 = 0 \Rightarrow x = 2$ care convine.	3p 2p
4.	Mulțimea A are 12 elemente, deci sunt 12 cazuri posibile Cum $12 < \sqrt[3]{2024} < 13$ sunt 5 cazuri favorabile, $p = \frac{5}{12}$	2p 3p
5.	Din relația $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD} \Rightarrow D$ este mijlocul segmentului BC Punctul D are coordonatele $D(2, -4)$	3p 2p
6.	$\sin C = \frac{7\sqrt{2}}{10} \Rightarrow \cos C = \frac{\sqrt{2}}{10}$ sau $\cos C = -\frac{\sqrt{2}}{10}$ $\sin A = \sin(B + C) = \frac{4}{5}$ sau $\sin A = \sin(B + C) = \frac{3}{5}$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea
(30 puncte)

1.a)	$\det A(a) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a-1 \\ 2 & a & -1 \\ a+1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -a^3 + 7$ Cum $a \leq 0 \Rightarrow -a^3 + 7 = \det A(a) \neq 0$, deci rangul matricei $A(a)$ este 3.	3p 2p
b)	$\det(A(a) \cdot A(2)) = \det A(a) \cdot \det A(2) = (-a^3 + 7) \cdot (-1) = a^3 - 7$ $a^3 - 7 \geq 20 \Leftrightarrow (a-3)(a^2 + 3a + 9) \geq 0$. Cum $a^2 + 3a + 9 > 0, \forall a \in \mathbb{R} \Rightarrow a \in [3, +\infty)$	2p 3p
c)	Din condiția ca $x_0 = 1$, sistemul având soluție unică avem $x_0 = \frac{5a^2 - 3a - 13}{a^3 - 7}$ $\frac{5a^2 - 3a - 13}{a^3 - 7} = 1 \Leftrightarrow a^3 - 5a^2 + 3a + 6 = 0 \Leftrightarrow (a-2)(a^2 - 3a - 3) = 0$ cu singura soluție întreagă $a = 2$	2p 3p

2.a)	$1 \circ (-1) = \frac{1}{3}$	2p
	$(-1) \circ (-1) = \frac{1}{3}$, deci $1 \circ (-1) = (-1) \circ (-1)$	3p
b)	$x \circ x = -3 \left(3^x - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{1}{3}$	2p
	$-3 \left(3^x - \frac{1}{3} \right)^2 + \frac{1}{3} \geq -1 \Rightarrow -\frac{1}{3} \leq 3^x \leq 1 \Rightarrow x \in (-\infty, 0]$	3p
c)	$x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_6 = (-3)^5 \left(3^{x_1} - \frac{1}{3} \right) \left(3^{x_2} - \frac{1}{3} \right) \dots \left(3^{x_6} - \frac{1}{3} \right) + \frac{1}{3}$	2p
	$N = (-3)^5 \cdot 6! = (-3)^5 \cdot 720$, ultima cifră este 0	3p

SUBIECTUL al III-lea
(30 puncte)

1.a)	$f'(x) = (\ln x)' - (\ln(\ln x))' = \frac{1}{x} - \frac{1}{x \ln x} =$	3p
	$= \frac{\ln x - 1}{x \ln x}$, $x \in (1, +\infty)$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x + x) \cdot \frac{x}{e^{x+1}(x+1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + x}{e^{x+1}} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} =$	3p
	$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{x}{e^x}}{e} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{1}{e}$	2p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$, $f'(x) \geq 0$ pentru $x \in [e, +\infty)$, funcția f este crescătoare pe $[e, +\infty)$	3p
	Cum $x < x+1$ și funcția f este crescătoare pe $[e, +\infty)$ se obține $f(x) < f(x+1)$, $\ln x - \ln(\ln x) < \ln(x+1) - \ln(\ln(x+1)) \Rightarrow \ln x - \ln(x+1) < \ln(\ln x) - \ln(\ln(x+1))$ și din proprietățile logaritmilor, concluzia.	2p
2.a)	$\int_0^2 x f^2(x) dx = \int_0^2 x(x^2 + 5) dx = \int_0^2 (x^3 + 5x) dx$	3p
	$= \left(\frac{x^4}{4} + 5 \frac{x^2}{2} \right) \Big _0^2 = 14$	2p
b)	$0 \leq I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{x^2 + 5} dx \leq \sqrt{6} \int_0^1 x^n = \frac{\sqrt{6}}{n+1}$, pentru orice număr natural nenul n	3p
	Cum $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{6}}{n+1} = 0$, obținem $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$	2p
c)	$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{x^2 + 5} dx = \int_0^1 x^n \frac{(x^2 + 5)}{\sqrt{x^2 + 5}} dx = \left(\int_0^1 x^{n+1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}} + 5x^{n-1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}} \right) dx$	2p
	$= \sqrt{6} - (n+1)I_n + 5\sqrt{6} - 5(n-1)I_{n-2}$ și obținem $(n+2)I_n + 5(n-1)I_{n-2} = 6\sqrt{6}$ pentru orice număr natural n , $n \geq 3$.	3p