Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

THEMA I **(30 Punkte)**

5p **1.** Zeige, dass $\left(3+\lg\frac{1}{10}\right)\cdot\lg\sqrt{10}=1$.

5p **2.** Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax-1$, wobei a eine reelle Zahl ist. Bestimme die reellen Zahlen a so, dass $(f\circ f)(1)=1$.

5p **3.** Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $2^{x+1}\cdot 8^x=32$.

5p **4.** Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass für eine zufällig gewählte Zahl n aus der Menge der natürlichen zweistelligen Zahlen, die Zahl $\sqrt{n+100}$ natürlich ist.

5p **5.** Gegeben sind die Punkte $A(1,4)$, $B(4,6)$ und $C(4,2)$ in dem kartesischen Koordinatensystem xOy. Bestimme die Koordinaten des Punktes D, wenn $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

5p **6.** Gegeben ist der Ausdruck $E(x)=\operatorname{tg}x-4\cos\frac{x}{2}\cdot\cos x$, wobei $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Zeige, dass $E\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$.

THEMA II **(30 Punkte)**

1. Gegeben sind die Matrizen $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ und $A(x)=\begin{pmatrix}1&-1&x\\-1&0&0\\x&0&-1\end{pmatrix}$, wobei x eine reelle Zahl ist.

5p **a)** Zeige, dass $\det(A(0))=1$.

5p **b)** Zeige, dass $\det(A(x)\cdot A(x)-I_3)\le 0$, für jede reelle Zahl x.

5p **c)** Gegeben ist die Matrix $B\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$. Bestimme die Matrix $X\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ so, dass $X\cdot(A(0))^{-1}=B\cdot A(0)$, wobei $(A(0))^{-1}$ die Umkehrmatrix der Matrix $A(0)$ ist.

2. Auf der Menge $M=[0,+\infty)$ definiert man die Verknüpfung $x*y=\frac{x^2+y^2+x+y}{x+y+1}$.

5p **a)** Zeige, dass $1*2=2$.

5p **b)** Zeige, dass $e=0$ das neutrale Element der Verknüpfung „$*$” ist.

5p **c)** Bestimme die Paare (m,n) von natürlichen Zahlen so, dass $m*n=5$.

THEMA III **(30 Punkte)**

1. Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+6)\sqrt{x^2+4}$.

5p **a)** Zeige, dass $f'(x)=\frac{2\left(x^2+3x+2\right)}{\sqrt{x^2+4}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Bestimme die Monotonieintervalle der Funktion f.

5p **c)** Beweise, dass die Gleichung $f(x)=m$ eine einzige Lösung für jede ganze Zahl m hat.

2. Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$.

5p **a)** Zeige, dass $\int_0^4 e^x f(x)\,dx=12$.

5p **b)** Zeige, dass $\int_0^1 f(x)\,dx=\dfrac{2e-3}{e}$.

5p **c)** Gegeben ist die Zahl $I_n=\int_0^1 \dfrac{x^{n-1}}{f(x^n)}dx$ für jede natürliche Zahl n, $n\ge 2$. Beweise, dass $\dfrac{\ln 2}{n}\le I_n\le \dfrac{e-1}{n}$, für jede natürliche Zahl n, $n\ge 2$.