Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

СУБЈЕКАТ I (30 бодова)

5б **1.** Докажите да $\left(3+\lg\frac{1}{10}\right)\cdot\lg\sqrt{10}=1$.

5б **2.** Сматра се функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax-1$, где a је реални број. Одредите реалне бројеве a тако да $(f\circ f)(1)=1$.

5б **3.** Решите у скупу реалних бројева једначину $2^{x+1}\cdot 8^x=32$.

5б **4.** Одредите вероватноћу, тако да бирајући један број n из скупа двоцифрених природних бројева, број $\sqrt{n+100}$ да буде природни.

5б **5.** У картезијанском систему xOy сматрају се тачке $A(1,4)$, $B(4,6)$ и $C(4,2)$. Одредите координате тачке D, тако да $\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$.

5б **6.** Сматра се израз $E(x)=\operatorname{tg}x-4\cos\frac{x}{2}\cdot\cos x$, где $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Докажите да $E\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$.

СУБЈЕКАТ II (30 бодова)

1. Сматрају се матрице $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ и $A(x)=\begin{pmatrix}1&-1&x\\-1&0&0\\x&0&-1\end{pmatrix}$, где x је реални број.

5б **a)** Докажите да $\det(A(0))=1$.

5б **b)** Докажите да $\det(A(x)\cdot A(x)-I_3)\le 0$, за било који реални број x.

5б **c)** Сматра се матрица $B\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, $B=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$. Одредите матрицу $X\in\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ тако да $X\cdot(A(0))^{-1}=B\cdot A(0)$, где $(A(0))^{-1}$ јесте инверсна матрица матрице $A(0)$.

2. На скупу $M=[0,+\infty)$ дефинише се закон $x*y=\frac{x^2+y^2+x+y}{x+y+1}$.

5б **a)** Докажите да $1*2=2$.

5б **b)** Докажите да $e=0$ јесте неутрални елеменат закона „$*$”.

5б **c)** Одредите парове природних бројева (m,n) тако да $m*n=5$.

СУБЈЕКАТ III (30 бодова)

1. Сматра се функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+6)\sqrt{x^2+4}$.

5б **a)** Докажите да $f'(x)=\frac{2\left(x^2+3x+2\right)}{\sqrt{x^2+4}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5б **b)** Одредите интервале монотоније функције f.

5б **c)** Докажите да једначина $f(x)=m$ има јединствену солуцију, за било који цео број m.

2. Сматра се функција $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{e^x}$.

5б **a)** Докажите да $\int_0^4 e^x f(x)\,dx=12$.

5б **b)** Докажите да $\int_0^1 f(x)\,dx=\dfrac{2e-3}{e}$.

5б **c)** За било који природни број n, $n\ge 2$, сматра се број $I_n=\int_0^1 \dfrac{x^{n-1}}{f\left(x^n\right)}dx$. Докажите да $\dfrac{\ln 2}{n}\le I_n\le\dfrac{e-1}{n}$, за било који природни број n, $n\ge 2$.