Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

THEMA I **(30 Punkte)**

5p **1.** Gegeben sind die komplexen Zahlen $z_1 = 3 - i$ und $z_2 = 1 + i$. Zeige, dass $z_1 + iz_2 = 2$.

5p **2.** Gegeben sind die Funktionen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 5 - x$ und $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = x + 2$. Bestimme die reelle Zahl a so, dass $f(a) = g(a+1)$.

5p **3.** Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $\log_3\left(4x - x^2\right) = 1$.

5p **4.** Bestimme wie viele natürliche ungerade, zweistellige Zahlen, deren Zehnerziffer eine gerade Zahl ist, kann man mit den Elementen der Menge $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ bilden.

5p **5.** Gegeben sind die Punkte $A(0,3)$, $B(2,0)$ und C in dem kartesischen Koordinatensystem xOy. Wenn der Punkt B die Mitte der Strecke OC ist, bestimme den Abstand zwischen den Punkten A und C.

5p **6.** Gegeben ist das Dreieck ABC, rechtwinklig in A, mit $B = \frac{\pi}{6}$ und mit der Seitenhalbierenden $AM = 4$. Zeige, dass der Flächeninhalt des Dreiecks ABC gleich mit $8\sqrt{3}$ ist.

THEMA II **(30 Punkte)**

1. Gegeben sind die Matrizen $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $A(x) = \begin{pmatrix} x & 3x-3 \\ 1-x & 3x-2 \end{pmatrix}$, wobei x eine reelle Zahl ist.

5p **a)** Zeige, dass $\det\left(A(0)\right) = 3$.

5p **b)** Bestimme die reelle Zahl m so, dass $A(2)\cdot A(0) + A(5) = mI_2$.

5p **c)** Bestimme die reellen Zahlen x so, dass $\det\left(A(x) - A(0)\cdot A(1-x)\right) = 3$.

2. Auf der Menge $M = (0,+\infty)$ definiert man die Verknüpfung $x \circ y = x + y + 1 - \sqrt{xy+1}$.

5p **a)** Zeige, dass $1 \circ 8 = 7$.

5p **b)** Bestimme $x \in M$ so, dass $x \circ \frac{3}{x} = x$.

5p **c)** Bestimme die natürlichen, von Null verschiedenen Zahlen n so, dass $\left(n \circ (n+2)\right) \circ (n+4) > \frac{n^2}{2}$.

THEMA III **(30 Punkte)**

1. Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \left(x^3 + 2x^2\right)e^x$.

5p **a)** Zeige, dass $f'(x) = x\left(x^2 + 5x + 4\right)e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Bestimme die Gleichung der Tangente an das Schaubild der Funktion f in dem Punkt mit der Abszisse $x = 0$, der zum Schaubild der Funktion f gehört.

5p **c)** Zeige, dass $-\frac{32}{e^{x+4}} \le x^2(x+2) \le \frac{1}{e^{x+1}}$, für jedes $x \in [-4, 0]$.

2. Gegeben ist die Funktion $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - \frac{2}{x+1}$.

5p **a)** Zeige, dass $\int_1^2 \left(f(x) + \frac{2}{x+1}\right)dx = 7$.

5p **b)** Zeige, dass $\int_1^5 \left(3x^2 - f(x)\right)dx = 2\ln 3$.

5p **c)** Gegeben ist die Funktion $g:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $g(x) = f\left(\sqrt{x} - 1\right)$. Zeige, dass $\int_1^4 \left(a + bg(x)\right)g'(x)dx = 4a$, für alle reellen Zahlen a und b.