

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

I. FELADATSOR

(30 punct)

- 5p 1. Adottak a $z_1 = 3 - i$ és $z_2 = 1 + i$ komplex számok. Igazolja, hogy $z_1 + iz_2 = 2$.
- 5p 2. Adottak az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5 - x$ és $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x + 2$ függvények. Határozza meg azt az a valós számot, amelyre $f(a) = g(a + 1)$.
- 5p 3. Oldja meg a $\log_3(4x - x^2) = 1$ egyenletet a valós számok halmazán!
- 5p 4. Határozza meg, hogy hány olyan kétjegyű, páratlan természetes számot alkothatunk az $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ halmaz elemeivel, amelyekben a tízesek számjegye páros szám!
- 5p 5. Az xOy derékszögű koordináta-rendszerben adottak az $A(0, 3)$, $B(2, 0)$ és C pontok. Ha a B pont az OC szakasz felezőpontja, számítsa ki az A és C pontok távolságát!
- 5p 6. Az A -ban derékszögű ABC háromszögben adott $B = \frac{\pi}{6}$ és egyik oldalfelező $AM = 4$. Igazolja, hogy az ABC háromszög területe $8\sqrt{3}$.

II. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adottak az $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $A(x) = \begin{pmatrix} x & 3x - 3 \\ 1 - x & 3x - 2 \end{pmatrix}$ mátrixok, ahol x egy valós szám.
- 5p a) Igazolja, hogy $\det(A(0)) = 3$.
- 5p b) Határozza meg azt az m valós számot amelyre teljesül az $A(2) \cdot A(0) + A(5) = mI_2$ egyenlőség!
- 5p c) Határozza meg azokat az x valós számokat, amelyekre teljesül a $\det(A(x) - A(0) \cdot A(1 - x)) = 3$ összefüggés!
2. Az $M = (0, +\infty)$ halmazon értelmezzük az $x \circ y = x + y + 1 - \sqrt{xy + 1}$ műveletet.
- 5p a) Igazolja, hogy $1 \circ 8 = 7$.
- 5p b) Határozza meg $x \in M$ értékét, amelyre teljesül az $x \circ \frac{3}{x} = x$ egyenlőség!
- 5p c) Határozza meg azokat az n nullától különböző természetes számokat, amelyekre teljesül az $(n \circ (n + 2)) \circ (n + 4) > \frac{n^2}{2}$ egyenlőtlenség!

III. FELADATSOR

(30 pont)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^3 + 2x^2)e^x$ függvény.
- 5p a) Igazolja, hogy $f'(x) = x(x^2 + 5x + 4)e^x$, ahol $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Határozza meg az f függvény grafikus képéhez, az f grafikus képének $x = 0$ abszcisszájú pontjában húzott érintő egyenletét!
- 5p c) Igazolja, hogy $-\frac{32}{e^{x+4}} \leq x^2(x + 2) \leq \frac{1}{e^{x+1}}$, bármely $x \in [-4, 0]$ esetén!
2. Adott az $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 - \frac{2}{x+1}$ függvény.
- 5p a) Igazolja, hogy $\int_1^2 \left(f(x) + \frac{2}{x+1} \right) dx = 7$.

5p b) Igazolja, hogy $\int_1^5 (3x^2 - f(x)) dx = 2 \ln 3$.

5p c) Adott a $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(\sqrt{x} - 1)$ függvény. Igazolja, hogy $\int_1^4 (a + bg(x))g'(x) dx = 4a$,
bármely a és b valós számok esetén!