Examenul naţional de bacalaureat 2024
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model februarie 2024

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

5p **1)** Se consideră numărul complex $z=1-i$. Arătați că $z^3=z^2-2$.

5p **2)** Se consideră ecuația $x^2+ax+3=0$, unde a este un număr real. Dacă x_1 și x_2 sunt soluțiile ecuației, determinați numărul real a pentru care x_1, 2, x_2 sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

5p **3)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2\left(\frac{x}{2}\right)+\log_x 2=1$.

5p **4)** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\{2n+3 \mid n\in N, n\le 11\}$, acesta să fie mai mic decât $\sqrt[3]{2024}$.

5p **5)** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(a,b), B(0,-5), C(4,-3)$ pentru oricare numere reale a și b. Determinați coordonatele punctului D știind că $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}$.

5p **6)** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=7$, $AC=5$ și $B=\frac{\pi}{4}$. Calculați $\sin A$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

1) Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & -1 & a-1\\ 2 & a & -1\\ a+1 & -2 & 2\end{pmatrix}\in M_3(R)$ și sistemul de ecuații liniare

$$\begin{cases} x-y+(a-1)z=2\\ 2x+ay-z=3\\ (a+1)x-2y+2z=5\end{cases}, a\in R.$$

5p **a)** Arătați că pentru orice $a\in(-\infty,0]$ rangul matricei $A(a)$ este 3.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care $\det\left(A(a)\cdot A(2)\right)\ge 20$.

5p **c)** Determinați numerele întregi a pentru care sistemul de ecuații are soluția unică $(1,y_0,z_0)$ cu y_0,z_0 numere întregi.

2) Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=3^x+3^y-3^{x+y+1}$.

5p **a)** Arătați că $1\circ(-1)=(-1)\circ(-1)$.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x\circ x\ge -1$.

5p **c)** Determinați ultima cifră a numărului $N=\log_3\frac{4}{3}\circ\log_3\frac{7}{3}\circ\ldots\circ\log_3\frac{19}{3}-\frac{1}{3}$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

1) Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\to R,\ f(x)=\ln x-\ln(\ln x)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{x\ln x},\ x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}(e^x+x)f'(e^{x+1})$.

5p **c)** Arătați că $\ln\dfrac{x}{x+1}\le\ln\dfrac{\ln x}{\ln(x+1)}$, pentru orice $x\in[e,+\infty)$.

2) Se consideră funcția $f:R\to R,\ f(x)=\sqrt{x^2+5}$. Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\int\limits_0^1 x^n f(x)dx$.

5p **a)** Arătați că $\int\limits_0^2 xf^2(x)dx=14$.

5p **b)** Demonstrați că $\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$.

5p **c)** Arătați că $(n+2)I_n+5(n-1)I_{n-2}=6\sqrt{6}$, pentru orice număr natural n, $n\ge3$.