

Examenul național de bacalaureat 2024

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Model ianuarie 2024

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I

(30 puncte)

- 5p 1) Calculați $\log_3(\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{4}) - \log_3 \frac{1}{\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{20} + \sqrt[3]{16}}$.
- 2) Se consideră funcția strict crescătoare $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$.
5p Determinați numerele reale a și b știind că funcția f îndeplinește condiția:
 $f(x) - f^{-1}(x) = \frac{8}{9}[f(x) + 1]$ pentru orice x real, unde f^{-1} este inversa funcției f .
- 5p 3) Rezolvați în mulțimea numerelor reale inecuația $\log_{\frac{1}{2}}(\log_2 x) < 1$.
- 5p 4) Determinați probabilitatea ca alegând un număr format din 2 cifre, acesta să fie divizor al lui 2024.
- 5p 5) În sistemul ortogonal de axe xOy se consideră vectorii $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$,
5p $\vec{b} = (m+2)\vec{i} - m\vec{j}$, $\vec{c} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$. Determinați numărul real m pentru care unghiul format de vectorii \vec{a} și \vec{b} este egal cu unghiul format de vectorii \vec{b} și \vec{c} .
- 5p 6) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sin x \cos 2x = \sin^2 x - 2$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 puncte)

- 5p 1) Se consideră permutările $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in S_4$.
- 5p a) Calculați α^{2024} .
- 5p b) Rezolvați în S_4 ecuația $\alpha \cdot x = \beta^{-1}$.
- 5p c) Rezolvați în S_4 ecuația $x^2 = \beta$.
- 2) Pe mulțimea \mathbb{Z}_6 se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = (x + 4)(y + 4) + 2$.
- 5p a) Demonstrați că $\hat{3}$ este element neutru al legii de compoziție.
- 5p b) Rezolvați în mulțimea \mathbb{Z}_6 ecuația $x \circ x \circ x = x$.
- 5p c) Demonstrați că funcția $f: \mathbb{Z}_6 \rightarrow \mathbb{Z}_6, f(x) = x \circ \hat{1}$ este bijectivă.

SUBIECTUL al III-lea

(30 puncte)

- 5p 1) Se consideră funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$.
- a) Determinați imaginea funcției f .

5p b) Demonstrați că pentru orice $x \in (0, \infty)$ funcția f este convexă.

5p c) Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - 1}{f'(x)}$.

2) Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x(x^3 + 1)}$.

5p a) Determinați $\int (x^2 - x + 1)f(x) dx$.

5p b) Calculați $\int_1^2 f(x) dx$.

5p c) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^2 x^{-n+1} f(x) dx$.