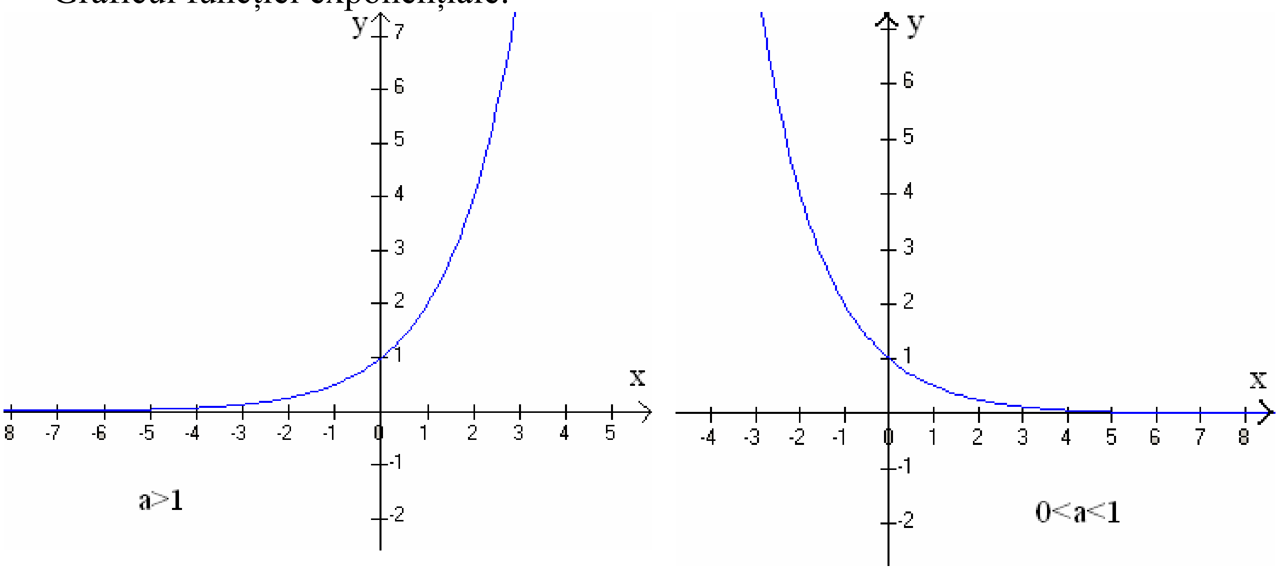
Funcția exponențială

<u>Def</u>. Fie $a>0$, $a\neq 1$. Funcția $f:\mathbf{R}\to(0,\infty)$, $f(x)=a^x$ se numeşte funcția exponențială de bază a.

Graficul funcției exponențiale:



Proprietăți:

1) $f(0)=a^0=1$, graficul funcției exponențiale taie axa Ox în (0,1).
2) Funcția exponențială exte convexă.
3) Monotonia: dacă $a>1$, atunci f este strict crescătoare;
   dacă $0<a<1$, atunci f este strict descrescătoare.
4) Dacă $a>1$ şi $x>0 \Rightarrow f(x)>1$
   $x<0 \Rightarrow f(x)<1$
   $0<a<1$ şi $x>0 \Rightarrow f(x)<1$
   $x<0 \Rightarrow f(x)>1$.
5) Funcția exponențială este bijectivă.

Ecuații exponențiale

Ecuația ce conține variabila necunoscută la exponetul puterii se numeşte **ecuație exponențială**.

1. $a^x = b$, $a>0$, $a\neq 1$, $b>0$. Soluția $x = \log_a b$, $b\in\mathbf{R}$.
2. $a^x = b$, $a>0$, $a\neq 1$, $b\leq 0$, nu are nici o soluție realã
3. Ecuația exponențială de tipul:

$$a^{f(x)} = b,$$

unde $a > 0$, $a \neq 1$ si $b > 0$, este echivalentă cu ecuația

$$f(x) = \log_a b,$$

4. Dacă $a > 0$ şi $a \neq 1$, atunci ecuaţiile
$$a^{f(x)} = a^{g(x)}$$
   şi
$$f(x) = g(x)$$
   sunt echivalente.

5. $a^x > b$. Fie S mulţimea soluţiilor. Avem:

a	b	S
$a > 1$	$b > 0$	$(\log_a b, +\infty)$
$0 < a < 1$	$b > 0$	$(-\infty, \log_a b)$
$a > 0, a \neq 1$	$b < 0$	$\mathbf{R}$

6. $a^x < b$. Fie S mulţimea soluţiilor. Avem:

a	b	S
$a > 1$	$b > 0$	$(-\infty, \log_a b)$
$0 < a < 1$	$b > 0$	$(\log_a b, +\infty)$
$a > 0, a \neq 1$	$b < 0$	$\varnothing$

Probleme propuse

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x)=2^x+\log_3 x$. Să se calculeze $f(1)+f(3)$.

2. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{x-2}$.

3. Să se determine coordonatele punctelor de intersecţie cu axele de coordonate a graficului funcţiei $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, $f(x)=2^{x+3}-2$.

4. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{2x}+2\cdot 3^x-3=0$.

5. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x+1}\cdot 2^x=108$.

6. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\left(3+2\sqrt{2}\right)^x = \left(1+\sqrt{2}\right)^2$.

7. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\frac{1}{2^x} = 4$.

8. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^x\cdot 5^x=15$.

9. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\frac{2^x}{3^x} = \frac{3}{2}$.

10. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\frac{1}{2^x} = \frac{4^x}{8}$.

11. Se consideră funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}, f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Să se calculeze $f(0)+f(1)+\ldots+f(4)$.

12. Să se determine numărul real a, ştiind că numerele $2^a, 4^a+1$ şi 2^{a+2} sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.

13. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^x+2^{-x}=\frac{5}{2}$.

14. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^x\cdot 3^x=36$.

15. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^x+2\cdot 3^x+1=7$.

16. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{x^2-4x}=\frac{1}{8}$.

17. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{x^2+x}=9$.

18. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^x+3^{-x}=\frac{10}{3}$.

19. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{x^2+x+1}=8$.

20. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{\sqrt{x-1}}=4$.

21. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{2x^2+3x-2}=8$.

22. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x-6\cdot 2^x+8=0$.

23. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $9^x-4\cdot 3^x+3=0$.

24. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{2x-5}=3^{x^2-8}$.

25. Să se determine soluţiile reale ale ecuaţiei $2^{x^2}=16$.

26. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $5^{x^2-x}=5^{5x-5}$.

27. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^{2x-1}=3^{5-x}$.

28. Să se rezolve în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2^{x^2-x}=4$.

Probleme rezolvate

1. Să se demonstreze că pentru orice $x\in\mathbf{R}$ numerele 3^x-1, 3^{x+1} şi $5\cdot 3^x+1$ sunt termeni consecutivi într-o progresie aritmetică.

R. Dacă a_{k-1}, a_k, a_{k+1} sunt termeni consecutivi într-o progresie aritmetică, atunci $a_k=\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}\Leftrightarrow 2a_k=a_{k-1}+a_{k+1}$ (proprietatea de medie aritmetică). Verificăm această proprietate: $3^x-1+5\cdot 3^x+1=6\cdot 3^x=2\cdot 3\cdot 3^x=2\cdot 3^{x+1}$.

2. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $3^{x-2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}}$.

R. $3^{x-2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x}}$, condiția $x\geq 0$ şi obținem: $3^{x-2}=3^{-\sqrt{x}}\Rightarrow x-2=-\sqrt{x}\Rightarrow x+\sqrt{x}-2=0$, notăm $\sqrt{x}=y\ \Rightarrow$ ecuația $y^2+y-2=0$ cu soluțiile y_1=–2 şi 2 şi y_2 = 1. Revenim la substituția făcută şi obținem: $\sqrt{x}=-2$ nu are soluții reale şi $\sqrt{x}=1$ are soluția x = 1, soluția ecuației.

3. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $2^x+2^{x+3}=36$.
R. $2^x+2^{x+3}=36\Rightarrow 2^x+2^x\cdot 2^3=36\Rightarrow 2^x+8\cdot 2^x=36\Rightarrow 9\cdot 2^x=36\Rightarrow 2^x=4\Rightarrow x=2$.

4. Să se determine soluțiile reale ale ecuației $4^x-3\cdot 2^x+2=0$.
R. Ecuația se poate scrie $\left(2^2\right)^x-3\cdot 2^x+2=0\Rightarrow\left(2^x\right)^2-3\cdot 2^x+2=0$. Notăm $2^x=y$ şi obținem ecuația $y^2-3y+2=0$ cu soluțiile $y_1=1$ şi $y_2=2$. Revenim la subsituție: $2^x=1$ $\Rightarrow x_1=0$ şi $2^x=2\Rightarrow x_2=1$. $S=\{0, 1\}$.

5. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x+3}-2^x=28$.
R. $2^{x+3}-2^x=28\Rightarrow 2^x\cdot 2^3-2^x=28\Rightarrow 8\cdot 2^x-2^x=28\Rightarrow 7\cdot 2^x=28\,\big|:7\Rightarrow 2^x=4\Rightarrow x=2$.

6. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $125^x=\frac{1}{5}$.

R. $125^x=\frac{1}{5}\Rightarrow\left(5^3\right)^x=5^{-1}\Rightarrow 5^{3x}=5^{-1}\Rightarrow 3x=-1\Rightarrow x=-\frac{1}{3}$.

7. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $125^x=\frac{1}{5}$.

R. $125^x=\frac{1}{5}\Rightarrow\left(5^3\right)^x=5^{-1}\Rightarrow 5^{3x}=5^{-1}\Rightarrow 3x=-1\Rightarrow x=-\frac{1}{3}$.

8. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^x-14\cdot 2^{-x}=-5$.
R. $2^x-14\cdot 2^{-x}=-5\,\big|\cdot 2^x\Leftrightarrow\left(2^x\right)^2-14=-5\cdot 2^x\Leftrightarrow\left(2^x\right)^2+5\cdot 2^x-14=0$. Notăm $2^x=y$ şi se obține ecuația $y^2+5y-14=0$ cu soluțiile $y_1=-7$ şi $y_2=2$. Revenind la necunoscuta $x\Rightarrow$ $2^x=-7$ nu are soluție şi $2^x=2$ cu soluția $x=1$.

9. Să se ordoneze crescător numerele $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$, 64 şi $\sqrt[3]{8}$.

R. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}=4^2=2^4$, $64=2^6$, $\sqrt[3]{8}=2\Rightarrow 2<2^4<2^6\Rightarrow \sqrt[3]{8}<\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}<64$.

10. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $4^{x+2}=2^{x^2+5}$.

R. $4^{x+2}=2^{x^2+5}\Rightarrow\left(2^2\right)^{x+2}=2^{x^2+5}\Rightarrow 2x+4=x^2+5\Rightarrow x^2-2x+1=0\Rightarrow\left(x-1\right)^2=0\Rightarrow x=1$.